

Marcelo Bairral
George Bravo
Soraya Izar

RETRATOS DE EXPERIÊNCIAS PARA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA

Série InovaComTic

RETRATOS DE EXPERIÊNCIAS
PARA VISUALIZAÇÃO EM
GEOMETRIA

Marcelo Bairral

George Bravo

Soraya Izar



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

Reitor

Roberto de Souza Rodrigues

Vice-Reitor

César Augusto Da Ros

Pró-Reitora de Pesquisa e Pós-Graduação

Lucia Helena Cunha dos Anjos

Pró-Reitor Adjunto de Pesquisa e Pós-Graduação

João Márcio Mendes Pereira



EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
RURAL DO RIO DE JANEIRO

Conselho Editorial

Patricia Reinheimer (Coordenadora),

Bruna de Azevedo Baêta,

Carlos Eduardo Coutinho da Costa,

Érika Flávia Machado Pinheiro,

Fabiane Frota da Rocha Morgado,

Maria Cristina Drumond e Castro,

Marisa Fernandes Mendes,

Marta Regina Cioccarì,

Sergio Manuel Serra da Cruz.

Coordenação Administrativa

Wallace Lucas Magalhães

RETRATOS DE EXPERIÊNCIAS PARA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA



Comitê Editorial da Série InovaComtic

Alexandre Rodrigues de Assis - SEEDUC/RJ

Arthur B. Powell - Rutgers University, Newark, EUA

Dora Soraia Kindel - UFRRJ

Fabiane Frota da Rocha Morgado (UFRRJ),

Gisela Maria da Fonseca Pinto - UFRRJ

Javier Diez-Palomar - Universidade de Barcelona

Marcelo Almeida Bairral -UFRRJ (Coordenador)

Maurício Rosa - UFRGS

Nilce Fátima Scheffer - UFFS

Rosana de Oliveira -UERJ

EDITORA DA UNIVERSIDADE RURAL

Seropédica

2022

Todos os direitos desta edição reservados à Editora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, ou de parte do mesmo, sob quaisquer meios, sem autorização expressa da Editora.

Preparador de originais	<i>Daniel Corban Rodrigues</i>
Projeto, diagramação e capa	<i>Dandara do Porto Pereira</i>
Supervisor de revisão	<i>Wallace Lucas Magalhães</i>
Revisão	<i>João Paulo de Abreu Almeida Costa e Póvoa Vanessa Oliveira</i>
Leitura de prova	<i>João Paulo de Abreu Almeida Costa e Póvoa Vanessa Oliveira</i>

UFRRJ / Biblioteca Central / Divisão de Processamentos Técnicos
Bibliotecária: Alessandra Bessa (CRB-7 5919)

R438 Retratos de experiências para visualização em geometria [recurso eletrônico] / Organizadores: Marcelo Almeida Bairral, George William Bravo de Oliveira, Soraya Izar. – Seropédica: Ed. da UFRRJ, 2022. (Série InovaComTic)

9622KB ; PDF
Modo de acesso: internet

Inclui Bibliografia.
ISBN: 978-65-86859-28-7

1. Geometria. 2. Prática de ensino. 3. Matemática recreativa. I. Bairral, Marcelo Almeida. II. Oliveira, George William Bravo de. III. Izar, Soraya. IV. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. V. Título.

CDD 516.015

EDUR
Editora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
BR 465, Km. 7, Seropédica – RJ - CEP: 23.897-000
Telefone: (21) 2681-4711
Site: <https://editora.ufrrj.br/>
E-mail: edur@ufrrj.br



APRESENTAÇÃO OU CONVITE A UMA VIAGEM COM A GEOMETRIA

A organização de um livro que trata da visualização nasceu da ideia de reunir professores regentes de turmas e que atuam em laboratórios de ensino com práticas e vivências envolvendo a Geometria. Não são práticas ou roteiros para serem aplicados diretamente, como receitas, sem considerar o público-alvo. As práticas relatadas foram desenvolvidas levando-se em conta o contexto do nascimento de uma ideia frente à demanda dos estudantes. Problemas detectados, os professores autores procuraram meios de solucioná-los, adaptando as propostas aos recursos disponíveis, ao tempo, à estrutura da escola. Dessa forma, propomos estudar os relatos como experiências que são.

Aqui conseguimos reunir práticas em diferentes níveis de ensino. Do ensino fundamental ao ensino médio, incluindo a educação superior e a especialização, com os graduandos do curso de Pedagogia. Professores em seus campos de trabalho atuando como pesquisadores. Qual a motivação? Traduzir o conteúdo de uma matriz curricular, os objetivos de uma ementa, tópicos de uma aula em alguma vivência para serem afetados e afetar os seus grupos de alunos. Sim, porque a sala de aula é um campo de trocas e professores precisam também se renovar a cada aula, a cada ano para respirar novos ares.

Apostamos na visualização como uma habilidade a ser desenvolvida baseada nos conceitos fundamentais da Geometria e cujas experiências podem ser significativamente enriquecidas através das tecnologias. Tecnologias que, como bem define o professor doutor Marcelo Bairral da UFRRJ, vão de lápis e papel aos aplicativos em ambientes de Geometria Dinâmica para dispositivos móveis. E qual seria a tecnologia mais acertada? Aquela que melhor se adequar ao público-alvo e à realidade da sala de aula. Principalmente ao escrever para o público de um país tão diverso e tão desigual. Escolas sem recursos financeiros, sem o devido apoio governamental, mas que contam com profissionais que querem mudar essa realidade, muitas vezes aplicando recursos próprios. Apresentamos alguns retratos, faltam tantos outros para compor um panorama que dê conta de vivências por esse Brasil afora. Esperamos que este livro sirva de incentivo para o nascimento e afloração de mais retratos que revelem a beleza de nossa luta como educadores.

Assim, convidamos leitoras e leitores para uma observação crítica da proposta suscitada em cada capítulo, considerando o envolvimento dos atores que desempenham um papel ativo no processo de aprendizagem, sejam professores ou alunos.

Boa viagem!

SUMÁRIO

<u>Prefácio.....</u>	<u>9</u>
----------------------	----------

Obstáculos cognitivos e registros semióticos frente à habilidade da visualização na aprendizagem das geometrias (euclidiana e não euclidianas):

<u>1- Introdução.....</u>	<u>12</u>
<u>2. Ver, visualizar e representar: o que dizem as pesquisas.....</u>	<u>13</u>
<u>2.1 O que dizem as pesquisas estrangeiras.....</u>	<u>13</u>
<u>2.2 O que dizem algumas pesquisas brasileiras.....</u>	<u>17</u>
<u>3. Algumas decorrências de nossas pesquisas.....</u>	<u>19</u>
<u>4. À guisa de conclusão.....</u>	<u>22</u>

Visualizando com toques: Retas e ângulos em tela:

<u>1. Palavras para iniciar.....</u>	<u>23</u>
<u>2. Geometria, visualização e conceituação geométrica.....</u>	<u>23</u>
<u>3. Ângulos entre retas paralelas e uma transversal.....</u>	<u>28</u>
<u>4. Ambientes, o dinâmico e os toques.....</u>	<u>30</u>
<u>5. Contribuições e singularidades de um AGD.....</u>	<u>31</u>
<u>6. Episódio de ensino.....</u>	<u>35</u>
<u>6.1 Visualizando ângulos congruentes e ângulos colaterais.....</u>	<u>35</u>
<u>7. Um olhar para além dos toques.....</u>	<u>37</u>
<u>8. Palavras para concluir.....</u>	<u>37</u>

<u>Visão e vistas para a visualização.....</u>	<u>37</u>
--	-----------

A visualização e construção de conceitos matemáticos dos licenciados em pedagogia:

<u>1- Introdução.....</u>	<u>50</u>
<u>2. A visualização na formação de professores.....</u>	<u>51</u>

2.1 O processo visualização da adição e da subtração na formação de professores que ensinam
matemática..... 55

3. Desenvolvimento da Pesquisa..... 57

4. Análise..... 62

4.1 Análise da Tarefa 2..... 63

4.2 Análise da Tarefa 3..... 67

4.3 Algumas concepções dos licenciandos sobre visualização..... 74

5. Considerações Finais..... 75

A importância da visualização para o ensino da geometria

1- Introdução..... 77

2. O ensino de Geometria e a visualização..... 77

2.1 Algumas dificuldades relacionadas à visualização..... 79

2.2 Habilidades relacionadas à visualização..... 80

3. A utilização de recursos didáticos variados para o desenvolvimento da visualização..... 83

4. Visualizando algumas considerações..... 84

Visualizando além..... 86

Posfácio..... 87

Referências..... 89

Índice de figuras..... 98

Índice de quadros..... 101

Índice de abreviaturas e siglas..... 102

PREFÁCIO

Sob a ótica das primeiras experiências das crianças, é no exercício de observação de formas geométricas que constituem o espaço, e na identificação, descrição e comparação de suas semelhanças e diferenças, que elas vão construindo uma imagem mental, vislumbrando o objeto na sua ausência.

O ato de visualizar pode consistir em uma construção mental de objetos, ou dos processos a eles associados, percebidos pelo indivíduo como externos. Alternativamente pode, ainda, consistir em uma construção, em uma mídia externa como o papel, lousa ou tela do computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifica com objetos ou processos de sua mente. No entanto, embora uma distinção seja feita entre o que é externo (papel, computador etc.) e o que é interno (mental), é o indivíduo que percebe (e não uma outra pessoa que define) aqueles objetos como internos ou externos. Sendo assim, perfiço (ou “abraço a ideia de”) que “pensamos-com” imagens mentais e externas e com diferentes mídias, em variados coletivos pensantes, em ambientes e experiências diversos. Conjecturo que não há muito sentido focar na dicotomia entre imagens internas e externas. A todo momento recorreremos a representações externas, identificáveis aos olhos, ou às representações internas, construídas ao longo de experiências (matemáticas), e essas estão ficando tão imbricadas que é difícil identificar a linha tênue que as separa.

Há outras questões relevantes que poderíamos discutir. Há mais de 20 anos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) apontavam que o pensamento matemático se desenvolve inicialmente pela visualização. Há quem considere que o termo visualização abordado pelos PCNs tinha sentido restrito à observação atenta das figuras geométricas, destacando a necessidade de ampliar esse conceito, abarcando a formação ou ideia de uma imagem visual, mental (de algo que não se tem ante os olhos no momento). Na recentemente homologada Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por sua vez, vemos a relevância do processo de visualização minguar. Isso sim deve ser ponto de pauta na formação (inicial e continuada de professores), nas reuniões de professores nas escolas, nas pesquisas (por exemplo, analisando o impacto dessa ausência nos livros didáticos), entre outros.

Compreendo que a visualização é parte do “fazer matemática”. Há certamente entre matemáticos, educadores matemáticos, professores e alunos um consenso sobre a importância da visualização em Matemática, em especial no estudo da Geometria. Isso não pode se perder!

Visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração. O visual na Matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a um certo tipo de percepção intelectual, ligado fortemente à intuição matemática. Entre os matemáticos talvez haja pouca ênfase à intuição e aos

processos de pensamento ligados a ela como a visualização, os argumentos narrativos e indutivos. Poderíamos seguir aqui discutindo então que a visualização é reconhecida tanto entre os matemáticos quanto entre os educadores matemáticos, mas com *status* diferente em cada uma dessas comunidades, inclusive considerando a tecnologia ou não nesse processo. Aproveito para me posicionar e afirmar que acredito que as mídias não são apenas assistentes dos matemáticos, mas transformam a natureza da própria Matemática, e, portanto, são vistas como atores do coletivo pensante. Compreendo que, na Educação Matemática, a visualização é parte dos processos de ensino e aprendizagem, de produção matemática dos alunos, o que justifica sua relevância nessa área.

Durante meu doutorado, há mais de 15 anos, realizei leituras em que os autores apontavam que um dos desafios da Matemática do século XXI seria tornar a visualização um argumento de demonstração, e que as demonstrações visuais fariam uso possivelmente de uma linguagem visual apropriada, envolvendo também meios computacionais. Será que avançamos como esperado àquela época? Será que os “teoremas visuais” estão na sala de aula? Em diferentes contextos podemos perceber que grande credibilidade é dada à argumentação quanto à validade de uma proposição quando esta é apoiada em fatores visuais. Porém, apenas com o visual não é possível tecer conclusões. Assim, a busca da justificativa não deve priorizar apenas o convencimento, mas ir além disso. Aqui poderíamos seguir discutindo por várias páginas também.

Até aqui apresentei algumas das muitas compreensões, reflexões e inquietações que venho construindo ao longo dos anos, debatendo com autores (por meio de seus textos) e/ou colegas pesquisadores, professores e alunos, que se interessam pelo tema e que tenho a alegria de dialogar em bancas, eventos científicos, reuniões de grupos de pesquisas, palestras etc. São sempre espaços ricos de produção de conhecimento sobre o tema visualização.

Nessa caminhada chego a esse livro. Honrada e contente em receber o convite dos autores para escrever este prefácio, iniciei a leitura dos capítulos. Senti minha pequenez já na segunda linha, quando li que o primeiro capítulo trataria de considerações baseadas em cinco décadas de pesquisa. Cinco décadas? Mais do que eu tenho de vida hoje! Se já estava empolgada com a leitura, fiquei eufórica com o quanto estava por aprender ao ler este livro.

Espero que você, leitor, sinta a mesma euforia que senti ao trilhar os caminhos que os autores percorreram em suas caminhadas e que compartilham os resultados por meio dessa obra. Não quero dar *spoiler*, mas vou me atrever a dar apenas umas pequenas “pinceladas” das cores (ou seja, dos conteúdos) dos capítulos, para aguçar a leitura.

Início observando que, se você busca referências sobre visualização, terá neste livro um objeto valioso a ser explorado! Concepções teóricas distintas são apresentadas, culminando em uma linha do tempo sobre visualização. Não obstante, discussões sobre a natureza dos termos (como “ver”, “visualizar” e “representar”) são bem fundamentadas

e merecem ser salientadas. Se você considera, por exemplo, que “enxergar” é sinônimo de “ver”, deveria ler esse livro até o final! Se não mudar de ideia, vai ao menos ficar intrigado, refletindo e amadurecendo suas concepções.

Referências da didática francesa são longitudinalmente abordadas e amparam algumas das pesquisas, e há um tratamento teórico sobre visualização nessa linha, com base em autores nacionais e internacionais.

Recursos manipulativos variados também são identificados nas pesquisas narradas no livro. Ademais, os autores abarcam contextos variados, demandas que emergiram em uma disciplina de Desenho Básico em uma escola técnica ou aspectos da visualização debatidos em um curso de licenciatura em Pedagogia.

Houve ainda momentos em que fui conduzida à ideia da visualização com o toque (na tela do *smartphone*, com aplicativo GeoGebra). Certamente me vi diante de ponderações atuais, que merecem reflexão sobre diferenças (e semelhanças) que o uso dessa mídia traz para o processo de visualização.

Espero que você faça uma lista com muitos outros pontos que podem ser destacados no livro e sobre os quais não tratei aqui nesta introdução à leitura. É um momento (difícil) de escolhas! Se eu colocasse tudo, teríamos um texto tão longo que poderia ser confundido com um capítulo. E qualquer tentativa de resumo poderia não fazer jus ao material aqui reunido. Fica em aberto, então, a construção da sua lista de pontos para discussão, aprofundamento, reflexão, estudo, pesquisa etc. Pegue caneta e lápis (ou seria um *smartphone* ou outra mídia digital?) e boa leitura!

Por Rúbia Barcelos Amaral

Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro

OBSTÁCULOS COGNITIVOS E REGISTROS SEMIÓTICOS FRENTE À HABILIDADE DA VISUALIZAÇÃO NA APRENDIZAGEM DAS GEOMETRIAS (EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS)

Ana Maria Martensen Roland Kaleff,¹

1. Introdução

Enxergar, ver, visualizar. Três verbos tão presentes no nosso cotidiano, mas será que sabemos o que realmente significam? Quando assistimos a reportagens na mídia, percebemos que o último verbo é usado como sinônimo dos anteriores. Quando vemos na internet alguns vídeos apresentados por professores, percebemos a mesma ambiguidade. Neste texto, considerando que esses profissionais são os principais atores no meio educacional, aqueles que educam os indivíduos para o cotidiano e o enfrentamento da mídia, focaremos como tais verbos são caracterizados no âmbito da formação de professores de Matemática.

Como apresentamos a seguir, desde a década de 1960, muitas pesquisas sobre visualizar e sobre a habilidade da visualização aconteceram no mundo todo, principalmente nos Estados Unidos, Israel, França e Itália, pois, nos meios educacionais, já havia se instalado uma grande polêmica no ensino de Geometria Euclidiana, sobre o que significa visualizar e representar.

No Brasil, nas últimas três décadas, muito tem sido pesquisado sobre o papel da visualização e da representação em desenhos para a aquisição de conteúdos geométricos e é cada vez maior a evidência de que estudantes do Ensino Fundamental e do Médio, licenciandos e professores de Matemática apresentam concepções inadequadas, e até mesmo equivocadas, de muitas ideias geométricas devido às dificuldades com a visualização de suas representações.

Desde os anos 1990, existem estudos internacionais que ressaltam a importância de se considerar, na formação do professor, um conhecimento crítico da geometria elementar, o papel da visualização e a inclusão de outras geometrias além da euclidiana. Portanto, há mais de duas décadas, existem propostas que buscam,

sensibilizar colegas das universidades para um fato, considerado essencial e necessário, tanto à pesquisa matemática, quanto para o ensino: o de um conhecimento profundo e crítico da geometria elementar, incluindo o reconhecimento da importância do papel da habilidade da visualização, os fundamentos das geometrias não euclidianas, bem como suas aplicações, seus aspectos epistemológicos, históricos e didáticos² (MAMMANA; VILLANI, 1998, p. 326. Tradução livre da autora).

Recentemente, a importância de se trazer para o âmbito da formação dos professores, além da visualização, o tema referente à representação dos conceitos matemáticos fica bem

¹ Universidade Federal Fluminense (UFF). Contato: anakaleff@id.uff.br

² to sensitize their colleagues at colleges and universities to this crucial issue: a deep and critical knowledge of elementary geometry (including awareness of the role of visualization), foundations, non-euclidean geometries, as well as applicational, epistemological, historical and didactical aspects, is absolutely necessary both for advanced research and for teaching.

ênfâtizada na Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio - BNCC (2018), quando considera que:

As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, é em especial nessa área que podemos verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2018, p. 529, grifos da autora).

Apesar de tudo isso, no Brasil, a grande maioria dos cursos de licenciatura e de formação continuada de professores de Matemática, além de muitas vezes passarem ao largo de um bom ensino de geometria euclidiana, não consideram especificamente a habilidade da visualização. Também deixam de lado as representações envolvidas com os conceitos dessa área, não levando em conta procedimentos didáticos que possibilitem a análise e a comparação de sistemas axiomáticos diversos, com outras regras e interpretações além da euclidiana. Trataremos disso a seguir, trazendo um resumo das principais pesquisas realizadas por educadores matemáticos estrangeiros e brasileiros que tratam da visualização e da representação em Geometria. Terminamos elencando algumas de nossas pesquisas e suas decorrências, indicando práticas que permitam ao professor entender o desenvolvimento da habilidade da visualização do aluno e sua interligação com as representações geométricas, bem como abrir seus próprios horizontes para além da janela matemática aberta por Euclides, dos seus postulados, paradigmas gráficos e representações.

2. Ver, visualizar e representar: o que dizem as pesquisas

Apresentamos um resumo das principais pesquisas estrangeiras, seguido de uma breve explanação sobre os pesquisadores pioneiros e grupos de pesquisa brasileiros que tratam da visualização e representação em geometria.

2.1 O que dizem as pesquisas estrangeiras

Há cerca de três décadas, o grupo de pesquisadores israelenses do Instituto Weizmann, liderados por Rina Hershkowitz, apresentou, em Hershkowitz et al. (1990), um extenso relato elencando as principais linhas de pesquisas sobre visualização desenvolvidas no século passado e os problemas relevantes relacionados às inadequações apontadas nesses estudos. Por sua vez,

Douglas Clements e Michael Battista analisaram em Clements e Battista (1992), as pesquisas realizadas internacionalmente relacionando geometria euclidiana e visualização.

Foi Rina Hershkowitz quem focou a atenção sobre a formação dos conceitos geométricos na mente do estudante, e, portanto, sua visualização, criando a expressão *imagem do conceito*. Segundo Hershkowitz e Vinner (1983), esta imagem se forma e se modifica mentalmente conforme o sujeito vivencia atividades nas quais lhe são apresentadas características visuais relevantes, bem como não relevantes, do referido conceito. São consideradas características relevantes aquelas que aparecem em todos os exemplos do conceito, enquanto, características não relevantes são as que se apresentam em apenas alguns dos seus exemplos. Portanto, nos procedimentos didáticos, o estabelecimento da definição de um conceito geométrico surgiria como consequência desse processo mental construtivo da visualização como elaboração das imagens do conceito.

Em outra direção, desde a década de 1960, já havia se instalado uma grande polêmica no ensino de geometria euclidiana sobre o que significa visualizar nos meios educacionais, a partir dos trabalhos do casal Dinah e Pierre van Hiele. A experiência desse casal, advinda da prática pedagógica com alunos de 12 e 13 anos de escolas secundárias holandesas, fundamenta a teoria do chamado *Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico*, como encontrado em van Hiele (1986). Essa teoria é embasada sobre dois eixos fundamentais: em uma concepção estruturalista do mundo e da organização da cognição; e, na psicologia da *Gestalt*, a qual é ferramenta teórica para a análise da percepção (principalmente a visual) e interpretação dessas estruturas. Como decorrência deste duplo estatuto teórico, os van Hiele estavam, enquanto estruturalistas, em sintonia com outros pesquisadores e educadores matemáticos piagetianos (como Zoltan Dienes) e, enquanto teóricos da *Gestalt*, afastavam-se desses, na medida em que partiam do estudo da observação das formas encontradas no mundo para a análise da percepção e da interpretação das estruturas psicológicas.

Segundo o Modelo, partindo do *nível da visualização* de um conceito geométrico, no qual o aprendiz visualiza um desenho do objeto geométrico em estudo ou observado, ou seja, percebe (na sua mente, aquilo que vê) o desenho do objeto geométrico em sua totalidade de traços; seguido pelo *nível da análise*, em que as características visuais relevantes do conceito são percebidas; segue o *nível da ordenação informal*, em que, pretensamente, o aprendiz chega a uma primeira organização dessas características; seguido pelo *nível da ordenação formal*, no qual a definição do conceito poderia ser compreendida, e daí estaria apto a atingir o *nível do rigor* da conceituação do ente geométrico. Como parte fundamental da prática didática da teoria, no início do processo de ensino do conceito geométrico, o aluno deveria ser avaliado por meio de testes especiais de reconhecimento do nível, a partir do qual se daria a realização da aprendizagem. Segundo o Modelo, por meio deste processo, o aluno atingiria o nível do rigor no qual seria capaz de entender e relacionar conceitos abstratos geométricos, inclusive os relativos a sistemas dedutivos geométricos não euclidianos (sistemas em que o Quinto Axioma Euclidiano das Paralelas não se verifica), ou seja, geometrias não euclidianas.

Embora as pesquisas sobre o Modelo de van Hiele considerem que essa teoria fornece uma ampla estrutura teórica para reconhecimento do desenvolvimento cognitivo em geometria, elas também apontam para muitos pontos críticos, pois apesar do modelo ter sido concebido sob uma perspectiva da *Gestalt*, não mapeia vários aspectos da cognição.

Clements e Battista (1992) apontam para a existência de um nível anterior ao da visualização do que aquele considerado no modelo. No entanto, Matos (1992) aponta para uma possível existência de problemas não esclarecidos pelo Modelo, ao considerar a negação do papel das imagens na abstração e formalização de um conceito. Cabe lembrar que Pierre van Hiele admitia que, a partir do terceiro nível, não seria mais necessário o uso de imagens (mentais e visuais) para a ampliação, criação, ou até mesmo para o desvelamento de conceitos geométricos. Portanto, van Hiele aparentemente negaria um papel mais amplo das imagens frente aquele direcionado pelas proposições expressas nas linguagens natural ou simbólica na elaboração de ideias geométricas mais avançadas: “a partir do terceiro nível, não mais é possível o uso de estruturas visuais para clarear ideias” (VAN HIELE, 1986, p. 141).

Apesar do grande número de pesquisas internacionais relativas ao Modelo, um trabalho pouco divulgado de van Hiele de 1987 aponta para uma reestruturação dos níveis, os quais deveriam ser considerados em número de três em vez de cinco. Esta reestruturação, no entanto, segundo Clements e Battista (1992), carecia de refinamento, pois poderia não ser suficiente para caracterizar a visualização, o desenvolvimento dos conceitos de uma maneira formal e nem permitir caracterizar as relações entre conceitos geométricos mais abstratos, como os relativos às geometrias não euclidianas.

Pelo relatado, caracterizar a habilidade da visualização e suas consequências para o ensino de Matemática não tem sido uma tarefa simples, pois envolve um amplo conjunto de operações mentais que foram bem sintetizadas pelo israelense Abraham Arcavi:

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, em nossas mentes, sobre papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e de divulgar entendimentos (ARCAVI, 2003, p. 217).

Em outra direção, também desde o início da década de 1990, têm sido desenvolvidas pesquisas em uma linha de estudos relacionada com as linguagens (pictóricas, discursivas, algébrica, aritmética, entre outras) as quais consideram que a visualização está intrinsecamente ligada aos processos de representação dos conceitos envolvidos na criação e descrição das ideias matemáticas. Estas pesquisas analisam o desenvolvimento do pensamento em geometria do ponto de vista da *semiose* e se estabeleceram principalmente devido ao grupo francês liderado por Raymond Duval.

Segundo Duval (1995), as atividades matemáticas envolvem, pelo menos, dois entre quatro tipos de registros de linguagens (registros semióticos), separados em dois grupos. O primeiro, chamado de *registros multifuncionais*, compreende a língua natural (no nosso caso,

português) e as figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3); o segundo grupo, são os *registros monofuncionais* os quais envolvem as linguagens próprias à Matemática: os sistemas numéricos (binário, decimal, fracionário etc.), sistemas algébricos (incluindo cartesiano) e simbólicos das linguagens formais, e os do cálculo (diferencial e integral). No que se refere à aprendizagem da geometria, nas palavras do próprio pesquisador:

Se quisermos entender os mecanismos complexos da aprendizagem em matemática, deveremos analisar os modos específicos de funcionamento dos registros multifuncionais, especialmente no que se refere ao raciocínio envolvendo prova e visualização na resolução de problemas de geometria (DUVAL, 2000, p. 66).

Para Duval, a especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, sendo que tais representações podem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas, no entanto, podem tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza.

A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro (DUVAL, 2009, p. 32).

Duval pondera sobre o papel do professor que precisa ser preparado para trabalhar com tal noção de representação semiótica, pois o docente deve possibilitar os alunos a:

[...] exploração de todas as variações possíveis de uma representação em um registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes da representação em outro registro (DUVAL, 2009, p. 101).

O grupo de pesquisadores que trabalham com Duval apresenta inúmeras constatações relativas ao desvelamento das relações cognitivas ao se passar de um registro em uma linguagem para outro (conversão entre dois diferentes registros de representação referentes a um mesmo conceito matemático) para o estabelecimento de uma coordenação entre tais conversões e ao entendimento matemático. Sem tal coordenação, a compreensão do conceito matemático não se estabelece ou fica prejudicada.

Entre os pesquisadores estrangeiros, cabe ainda citar o italiano Lorenzo Magnani, que nos permite conhecer um procedimento mental pouco veiculado nos meios educacionais, que interliga imagens, visualização e representações: a abdução. Segundo Magnani (2001), tal procedimento é orientado por duas maneiras de se raciocinar: a geração de uma hipótese plausível e, a sua justificativa, para a verificação da validade dessa hipótese. Sobre o que nos interessa para o ensino das geometrias, Magnani trata do papel heurístico das figuras, em um particular processo cognitivo que chama de *abdução visual*. Este seria uma forma especial de *abdução* não verbal realizada por um indivíduo, que ocorre quando hipóteses são instantaneamente formuladas a

partir de experiências similares pré-existentes, e se constitui em um procedimento mental não inferencial, que pode ser categorizado como uma percepção.

A percepção é na realidade um veículo para a recuperação instantânea de conhecimentos que estavam previamente estruturados em nossa mente por meio de processos inferenciais. Por meio da percepção (construções de) conhecimentos são reorganizados com tal velocidade que passam a se tornar habituais e difusos e não demandam qualquer verificação adicional [...]. Muitos estímulos visuais são ambíguos, porém as pessoas tendem a estabelecer uma ordem para eles (MAGNANI, 1998, p. 228, grifo nosso).

A seguir, trataremos de como essas pesquisas foram e estão sendo consideradas no Brasil e em nossos estudos.

2.2 O que dizem algumas pesquisas brasileiras

Iniciamos lembrando que, no âmbito dos trabalhos de pesquisadores brasileiro, que trataram do Modelo de van Hiele sob a perspectiva de avaliação dos níveis, tem-se a tese pioneira de doutorado de Lilian Nasser sobre o desempenho de crianças brasileiras de 7º e 8º anos na construção do conceito de congruência de formas planas. Segundo Nasser (1992), a visualização é considerada no primeiro nível do Modelo, como preconizado por van Hiele, como a habilidade de se perceber (visualmente) o objeto geométrico em sua totalidade. A esta pesquisa seguiram-se outras relacionadas com a visualização de formas geométricas e suas representações relatadas em várias publicações do Projeto Fundação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS), José Carlos Pinto Leivas trabalhou durante muitos anos com temas ligados à Geometria e à formação do professor, pesquisando o papel da imaginação e da intuição frente à visualização e ao Modelo de van Hiele. Traz mais luz à visualização ao caracterizá-la como sendo “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2009, p. 111). Acrescenta ainda que tal processo “auxilia na construção do fazer matemático, bem como na comunicação dos conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático” (LEIVAS, 2009, p. 136).

Por sua vez, quanto às representações, Estela Kaufman Fainguelernt foi uma das primeiras pesquisadoras brasileiras a se preocupar com sua influência computacional na aprendizagem da Geometria, publicando em Fainguelernt (1999) um estudo sobre a experiência com crianças de 3º e 4º anos ao utilizarem diversas representações geométricas fazendo uso de computadores. É interessante assinalar que, em meados da década de 2000, temas relacionados à geometria dinâmica, na qual, as representações em desenhos e sua movimentação são desenvolvidas em meio virtual, tiveram um grande progresso nas pesquisas a partir da tradução do programa computacional alemão *Geogebra*, promovida pelo professor Humberto Bortolossi, na Universidade Federal Fluminense (UFF). Esse programa e inúmeras aplicações resultantes de

suas pesquisas podem ser encontrados na página institucional do professor³.

Cabe resumir que as pesquisas brasileiras relacionadas aos registros semióticos de representação e sua visualização, sob a concepção de Duval, têm sido desenvolvidas principalmente em três grandes centros: na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, liderados por Silvia Dias Alcântara Machado e por Saddo Ag Almouloud; na Universidade Federal de Santa Catarina com os professores Cláudia Regina Flores, Méricles Tadeu Moretti e Jorge Cássio Costa Nóbriga (relativas à geometria dinâmica) e, na Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela professora Célia Brandt. Alguns dos resultados dessas pesquisas encontram-se em Alcântara Machado (2003); Almouloud (2003); Costa Nóbriga (2019); Flores, Wagner e Buratto (2012); Moretti e Brandt (2020). Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRS, o grupo liderado pela professora Maria Alice Gravina, segundo Gravina (2015), utiliza ferramentas digitais da geometria dinâmica, como mediação semiótica, para pesquisar sobre a aprendizagem de números complexos, funções, ensino de equações etc., por meio de animações interativas nas quais é possível realizar tratamentos e conversões entre registros algébricos e geométricos.

Por outro lado, cabe ainda lembrar que as concepções que privilegiam a primazia dos conteúdos euclidianos na forma dedutiva, geralmente, não levaram em conta práticas que possibilitassem ao aluno uma abertura aos conhecimentos não euclidianos, sobre os quais os professores têm pouco conhecimento ou até mesmo desconhecem. Embora, desde o começo dos anos 2000, Zionice Martos-Rodrigues aponte sua preocupação com o ensino de geometrias alternativas à euclidiana no Ensino Médio, como pontuado em Martos-Rodrigues (2016) ao considerar a geometria de Riemann, relativamente à esfera.

Na Universidade Federal Fluminense - UFF, desde o final da década de 1980, nos preocupamos com a introdução às geometrias não euclidianas (lembramos que consideramos estas como sendo aqueles sistemas axiomáticos que negam especificamente o Quinto Axioma de Euclides) e com o Modelo de van Hiele. Passamos a desenvolver atividades para o ensino de Geometria, com ênfase na habilidade da visualização, que podem ser vistas em Kaleff (1994, 2003, 2004, 2016a) e Kaleff et al. (1994).

Nós também nos debruçamos sobre o significado de *imagem do conceito* de Hershkowitz. Segundo a nossa prática, como relatamos em Kaleff (2016b), a qual inclui pessoas cegas e de baixa visão, podemos completar esse significado considerando que: a imagem de um conceito matemático, ou seja, a *visualização do conceito*, é um constructo mental dependente tanto do enxergar “com os olhos” (ou “ver com as mãos” por meio do tato) e, portanto, da observação de imagens visuais (ou táteis), quanto advindas de representações expressas em linguagens proposicionais, como a língua portuguesa, as linguagens algébrica ou simbólica.

Em nossa prática, também percebemos que a caracterização da visualização, embora ampla, não é de fácil entendimento tanto para o licenciando como para o professor em exercício. Assim, a seguir, serão tratados alguns fatores que levam a muitas dificuldades para a aquisição

³ Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol>.

da habilidade, relacionados a obstáculos cognitivos que ainda se apresentam no âmbito da formação de professores.

3. Algumas decorrências de nossas pesquisas

Com as considerações anteriores, bem como em Kaleff (2016b), buscamos responder às perguntas com as quais iniciamos o presente texto. Afirmamos que, embora a maioria das representações dos objetos geométricos seja perceptível visualmente (ou de maneira tátil), é imprescindível não se confundir a habilidade da visualização, isto é, a habilidade de se perceber (mentalmente) o objeto geométrico em sua totalidade, com a percepção sensorial (como van Hiele considerava) das diferentes representações possíveis desse objeto. Ou seja, não confundir *ver com os olhos da mente* (visualizar) com *ver o objeto* (enxergar e ver a imagem real, visual ou tátil do objeto físico) por meio do aparato sensorial, principalmente daquele advindo das imagens visuais ou táteis geradas por representações em um desenho (gráfico ou em alto-relevo), sinais, fotos, traçados gráficos computadorizados etc.

Por outro lado, há mais de vinte anos, temos nos debruçado sobre representações e os estudos da *semiose* de Duval (1995) para desvelar obstáculos cognitivos relacionados a registros semióticos euclidianos (desenhos) na introdução aos conceitos não euclidianos. Consideramos *Geometrias não Euclidianas* os sistemas axiomáticos em que se nega algum dos Cinco Primeiros Axiomas de Euclides. Como relatado em Kaleff (2004, 2007), buscamos entender o papel da visualização na aquisição de conceitos geométricos no âmbito da formação de professores de Matemática. Para tanto, fomos à busca e identificação de categorias de obstáculos cognitivos, que comparecem no processo de resolução de problemas introdutórios aos novos conhecimentos não euclidianos.

Consideramos como *obstáculos cognitivos* constructos mentais que impedem ou perturbam o estabelecimento de relações de articulação entre as representações (mentais) do sujeito no processo de compreensão de um conceito ou no processo de realização de uma atividade. *Perguntas geradoras* foram tratadas e utilizadas como instrumentos mediadores da nossa ação dialógica, as quais permitem ao sujeito a desconstrução dos obstáculos cognitivos, ou seja, perguntas que permitem ao sujeito refletir sobre e ultrapassar as dificuldades apresentadas na configuração das representações mentais dos conceitos matemáticos utilizados no âmbito da resolução de um problema. Realizamos nossa pesquisa de doutorado no começo da década de 2000, a qual envolveu 8 estudos de caso e um questionário de validação das categorias encontradas, envolvendo 53 professores do ensino básico com experiência profissional média de cerca de 10 anos.

A pesquisa desvela a resolução de um problema-objeto cujo enunciado trata de uma abordagem semelhante à que ocorre na introdução aos sistemas axiomáticos não euclidianos, geralmente apresentados como modelos geométricos e não como um problema. O problema se refere a um jogo e à quantidade mínima de seus elementos, apresentando três regras explícitas

e três convenções implícitas referentes a *elementos quaisquer* chamados *pontos* e subconjuntos de três pontos, denominados *reta de um conjunto qualquer S*, cujos significados não são pré-determinados ao enunciado e nem devem ser fixados. Portanto, as regras e convenções estabelecem somente uma relação de pertinência e as implicações lógicas possíveis, entre os elementos e os subconjuntos de S, mas não estabelecem *a priori* nenhuma interpretação do seu significado (no que seja relacionado à métrica, ao comprimento e à proximidade). Buscamos verificar a existência de uma correspondência semântica entre as expressões *ponto de S* e *reta de S* relativamente a cada par de diferentes registros semióticos considerados na resolução. No procedimento dessa resolução, chega-se dedutivamente até 5 pontos e daí é necessária a adoção de um passo de abdução, com a hipótese da existência de um sexto ponto e sua constatação de ser verdadeira frente às regras e convenções, o que leva dedutivamente à solução do número mínimo de pontos do conjunto ser seis.

Resumindo, como apresentado em Kaleff (2004, 2007), verificamos que o processo de abdução da existência do sexto ponto não ocorreu espontaneamente na resolução do problema, a não ser quando o sujeito foi instigado por perguntas geradoras, quando se deu como um processo de abdução visual, envolvendo imagens a partir de desenhos, entre os quais predominaram representações euclidianas.

Partindo da análise cognitiva da conversão entre registros de representação realizados durante a resolução, verificamos a existência de 14 categorias de prováveis obstáculos cognitivos, os quais estão relacionados a 7 tipos de registros semióticos, sendo que 5 desses apresentam alguma característica gráfica euclidiana prototípica (como linearidade, horizontalidade, densidade, paralelismo etc.). No início do procedimento de resolução, todos os participantes apresentaram registros com características euclidianas, sendo que 40% chegaram a uma resposta final, embora errada, de 9 pontos, a qual foi reconsiderada frente às perguntas geradoras. Dois dos participantes não chegaram a nenhuma resposta conclusiva.

Pelo observado, as representações prototípicas euclidianas indicam a presença da visualização de imagens mentais incontrolláveis que afloram, quase instantaneamente, na mente do sujeito de maneira espontânea à simples menção dos termos homônimos euclidianos. Essas imagens mentais de elementos euclidianos espocam na mente de adultos intervindo de forma significativa no procedimento da resolução do problema. A ampla incidência da representação em desenhos de algumas destas imagens prototípicas recorrentes em todos os sujeitos, sugere a importância que elas possuem. São os casos de: segmentos paralelos, retas de infinitos pontos, e o caso da continuidade de uma reta (decorrentes da densidade de pontos da reta euclidiana). Portanto, os resultados indicam que: a presença, nos enunciados, de termos homônimos aos do conhecimento euclidiano, bem como de traçados criados a partir destes e a estes relacionados, interferem como obstáculos cognitivos nos procedimentos da resolução do problema.

Ainda na nossa pesquisa de doutorado, a partir de um questionário escrito respondido pelos 53 participantes sobre o conhecimento das geometrias, observamos que aproximadamente 7% afirmaram “não saber o que é o plano euclidiano”. Cerca de 18% admitiram “desconhecer

os axiomas relativos a este plano”, enquanto 20% afirmaram “ignorar o que é o quinto axioma de Euclides”. Ainda constatamos que aproximadamente 34% declararam “não saber o que são geometrias não euclidianas” ou que “desconhecem outra geometria além da euclidiana”, enquanto pouco mais da metade dos participantes afirmaram “não ter estudado geometrias não euclidianas no respectivo curso de graduação.”

Durante os anos de 2010 a 2018, aplicamos um questionário semelhante ao da pesquisa anterior a 588 professores do Ensino Básico de seis estados brasileiros, ao final de uma disciplina de um curso de especialização (pós-graduação *lato sensu*), ministrado a distância, no âmbito da Universidade Aberta do Brasil (UAB). Na disciplina, utilizando o texto de Kaleff (2016a), relacionamos considerações sobre visualização, o Modelo de van Hiele e uma breve introdução às geometrias euclidiana e não euclidianas. As respostas ao questionário são preocupantes, pois apontam para uma piora no conhecimento dos professores: 25% deles disseram ter conhecido os axiomas euclidianos durante a disciplina; 64% afirmaram ter conhecido as geometrias não euclidianas somente no curso de especialização mencionado; enquanto 40% as conheceram durante a graduação ou em outro curso de pós-graduação (porém, muitos afirmaram que só estudaram fatos históricos). Cerca da metade dos professores se referiu explicitamente a terem tomado ciência da importância da visualização para a aprendizagem das geometrias e do Modelo de van Hiele, na disciplina em questão.

Por outro lado, na nossa prática com licenciandos da UFF, observávamos também vários obstáculos cognitivos advindos de lacunas no desenvolvimento da visualização de sólidos geométricos. Assim, de 1996 a 2012, anualmente, aplicamos um questionário envolvendo os 5 poliedros regulares de Platão. No total, questionamos 398 licenciandos de Matemática. Todos tendo cursado, no mínimo, cinco períodos da Licenciatura, disciplinas de geometria euclidiana (plana e espacial) e analítica, nas quais também estudaram sólidos geométricos.

Alguns dos resultados do questionário já estão relatados em Kaleff e Mourão (2014), e envolvem o reconhecimento em desenhos, a visualização e o cálculo do volume de sólidos construídos com 5 a 18 pequenos cubos. Entre os resultados preocupantes, constatamos que somente 57% dos licenciados reconheceram corretamente um desenho de um sólido com 5 cubos. Do questionário também constavam as seguintes propostas:

- Desenhe uma planificação do tetraedro regular.
- Determine a seção plana obtida pelo corte de um plano que passa pelos pontos médios de quatro arestas de um tetraedro regular.

Dos desenhos de planificações, cerca de 80% estavam corretos e, dentre os errados, encontramos esquemas de planificações de cubos e prismas hexagonais; desenhos de pirâmides de base quadrada, de tetraedro em perspectiva cavaleira, de diversas combinações de diferentes números de triângulos e de quadrados, entre outros indevidos.

Das respostas encontradas para a segunda questão, somente cerca de 37% disseram corretamente que a seção plana é um quadrado, 23% deixaram a resposta em branco, enquanto

8% responderam não ser possível determinar tal seção. Entre as respostas erradas (cerca de 30%), constatamos justificativas do tipo: “não forma seção plana”, “esses 4 pontos não são coplanares”, “os 4 pontos não contêm o mesmo plano”, “nenhum plano contém esses 4 pontos”; “a seção plana é um tetraedro” (ou “é um octaedro”, “é uma pirâmide”, “é um tronco de pirâmide”, “é uma caixa”). Enfatizamos que as respostas apontam para grandes dificuldades que adultos já na metade de um curso de graduação em Matemática apresentam relativamente aos sólidos representados na maioria dos livros didáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

4. À guisa de conclusão

Duas décadas envolvem as constatações que obtivemos a partir das pesquisas com os professores sobre o conhecimento das geometrias não euclidianas; o surpreendente é que as mais atuais ainda apontam que os conhecimentos dos profissionais sobre visualização, geometria euclidiana e geometrias não euclidianas apresentam importantes fissuras. Como tratar esses temas nas licenciaturas de Matemática e na formação continuada dos professores ainda é um grande desafio para os meios educacionais.

Mudanças nas práticas realizadas nos cursos de Matemática serão necessárias pois, na apresentação das atividades introdutórias às Geometrias não Euclidianas, geralmente são tratados termos homônimos aos euclidianos bem como seus traçados em desenhos não euclidianos (referentes a outros elementos, às vezes sem qualquer relação com os euclidianos). Portanto, pelo que constatamos, esses termos podem vir a acarretar sérias consequências tanto em relação ao entendimento do significado de novos conceitos geométricos quanto em procedimentos de resolução de problemas e até em demonstrações.

Por sua vez, as dificuldades apresentadas pelos licenciandos frente aos desenhos dos sólidos elementares dos livros do Ensino Fundamental são, sem sombra de dúvida, devidas a obstáculos cognitivos advindos do desenvolvimento deficitário da visualização.

Finalizamos lembrando que nossas longas e densas pesquisas sobre visualização, representação e obstáculos cognitivos nos levaram a criar recursos didáticos manipulativos concretos e virtuais, a escrever sobre atividades destinadas a professores e suas salas de aula, visando a ultrapassar tais obstáculos cognitivos, como considerados em Kaleff (2002; 2005; 2016a; 2016b, entre outros). Esperamos que nossas realizações sejam úteis e tragam frutos nos tempos vindouros.

1. Palavras para iniciar

O estudo da Geometria desempenha um papel importante para o desenvolvimento cognitivo, lógico-matemático e social. Potencializa a imaginação, a intuição e a visualização, o que contribui para a construção e o desenvolvimento conceitual. Neste capítulo, abordamos o papel da visualização para a construção e o desenvolvimento conceitual, na qual ambos são potencializados por ambientes de geometria dinâmica (AGD) em dispositivos móveis com toques em telas (DMcTT), particularmente o aplicativo GeoGebra em *smartphones*.

Neste cerne, discutimos algumas demandas relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria, apresentamos algumas singularidades e potencialidades dos AGD e buscamos esclarecer algumas questões, tais como: o aprendizado da Geometria Euclidiana deve seguir a forma hierarquizada na qual ela está organizada? A construção e análise de um objeto geométrico mediada pelos cliques no *mouse* é diferente da mediação dos toques na tela?

Por permitir a abordagem de uma gama de temas relacionados a Geometria Euclidiana, como o estudo de triângulos e quadriláteros, centramos na análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal.

Para evidenciar alguns dos nossos resultados, ilustramos uma situação de ensino na qual dois estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental trabalharam na manipulação *touchscreen* mediada pelo aplicativo GeoGebra em *smartphones* na análise de ângulos e retas. Com um olhar para além dos toques, inferimos como os discentes se apropriaram dos toques para intuir, visualizar e formular suas conjecturas ao reposicionarem ângulos e retas de objetos geométricos.

Em um pequeno *spoiler*, acreditamos que os AGD possibilitam a criação de uma nova Geometria por permitir novas abordagens para velhos entes matemáticos e, inclusive, a formulação de novos conceitos. Em palavras para iniciar, convidamos você, leitor(a), para visualizar, reflexionar e ampliar as ideias que discutiremos nas linhas seguintes.

2. Geometria, visualização e conceituação geométrica

A origem da Geometria é tão antiga quanto a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles concordavam que a Geometria se originou no Egito, embora tivessem visões distintas em relação ao seu desenvolvimento. Enquanto Heródoto acreditava que seu nascimento se deu a partir de uma necessidade de fazer medições do Nilo, em cada inundação anual, para Aristóteles ela se constituía em objeto de lazer dos sacerdotes (BOYER, 1996). O fato é que a história da Matemática se confunde com a própria história do desenvolvimento da humanidade e que essa dualidade acerca da origem da Geometria coloca em evidência o seu potencial como aplicação

⁴ SEEDUC-RJ, Colégio Macedo Soares. Contato: marcospaulohenrique@hotmail.com

prática da Matemática e objeto de análise e abstração.

Para Atiyah (1982), não foi por acaso que a Geometria foi o primeiro ramo da Matemática a se desenvolver. A sua aplicabilidade direta na vida cotidiana exigiu menos esforço intelectual para sua compreensão. Para o estudioso, a Matemática é uma atividade estritamente humana que reflete a natureza da nossa compreensão e que na Geometria, como parte da Matemática, há a predominância do pensamento visual e representa uma forma de pensar que está presente em todas as áreas da Matemática.

De acordo Araújo (1994), o estudo da Geometria permite ampliar o nosso referencial de observação, pelo qual vemos o mundo, importante no desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, o qual nos possibilita passar da análise à abstração. Em sintonia, para Bairral (2009), o trabalho com a Geometria contribui para nossa capacidade de imaginar, analisar, argumentar e desenvolver estratégias próprias. O autor acrescenta que

[...] o desenvolvimento do pensamento geométrico tem singularidades de visualização e de representação e, conseqüentemente, envolve processos cognitivos que contribuem, diferentemente, no desenvolvimento da construção conceitual (BAIRRAL, 2009, p. 26).

Pavanello (2004) argumenta que a aprendizagem da Geometria amplia a capacidade de percepção espacial, requisitada para o exercício e compreensão nas mais variadas áreas de atuação profissional, além de se apresentar como um campo frutífero para o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, pois o estudo e análise do objeto conduz ao pensamento sobre as relações, acrescenta a autora.

Lorenzato (1995) alega que valorizar o pensamento geométrico e o raciocínio visual permite que os aprendizes sejam capazes de resolver problemas em situações geometrizadas nos mais variados contextos. Em complemento, para Settimy (2018), o pensamento visual não prioriza um tipo de representação em detrimento de outra. Esse é um processo que se articula nas diferentes dimensões, plana ou espacial, com harmonia. A estudiosa defende que o desenvolvimento do pensamento visual deve se dar por meio da utilização de recursos variados nos processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

Essas breves constatações direcionam para uma habilidade importante que pode ser desenvolvida por meio do estudo da Geometria: a visualização. À vista disso, consideramos pertinente trazer uma breve caracterização da visualização, habilidade indispensável a uma variedade de atividades da vida cotidiana e para a construção e desenvolvimento conceitual.

Em um contexto mais amplo, o termo “visualização” tem origem no latim, *visuais*, que é relativo à vista, que podemos entender como o ato ou efeito de ver. A palavra “ver”, neste caso, assume não só os objetos que estão diante dos olhos, como um livro impresso ou uma representação gráfica na tela do *smartphone*, mas as imagens mentais que conseguimos formar e manipular e é para este sentido que nossas reflexões convergem.

De acordo com Costa (2002), o termo visualização, em uma perspectiva geométrica,

possui significados distintos, sendo relacionados à mente do sujeito ou como processo de inter-relacionar domínios distintos, porém, independentemente da perspectiva adotada, a visualização é vista como a habilidade de manipular imagens visuais⁵. Na mesma direção, Zimmermann e Cunningham (1991), apontam o caráter multifacetado da visualização, que assim como a Geometria está enraizada na Matemática por se relacionar com diversas áreas dela, entre outros aspectos, possui perspectivas históricas, filosóficas, pedagógicas e tecnológicas.

Zimmermann e Cunningham (1991) ampliam a definição de visualização matemática. Para os autores, não se trata de apenas manipular uma imagem mental, mas é um processo que envolve a representação de um conceito, sem ou com o auxílio de uma tecnologia, para a compreensão e descobertas matemáticas. Os autores ainda defendem que a visualização implica um tipo de intuição que dá significado à compreensão à medida que direciona para construção de ideias criativas e serve como um guia para resolução de problemas. Para obter esse tipo de intuição, a visualização deve se relacionar com toda a matemática. Portanto, “o pensamento visual e as representações gráficas devem estar ligados a outros modos de pensamento matemático e outras formas de representação” (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 4).

De modo semelhante, Leivas (2009) define visualização como um processo de formar imagens mentais, que implica a construção e comunicação de um conceito matemático com o intuito de amparar a resolução de problemas, seja de natureza analítica ou geométrica. O autor também acrescenta o caráter intuitivo nesse processo, por considerar que a intuição está relacionada à construção de um conceito matemático a partir das experiências concretas e análise que o sujeito tem com o objeto.

Nacarato e Passos (2003) acrescentam a representação como um elemento essencial à visualização. As autoras alegam que a visualização e a representação são dois entes interligados e que desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento de conceitos geométricos. Definem que a visualização é a habilidade de pensar em termos de imagem mental, representação mental de um objeto ou relação. A representação neste contexto assume um caráter duplo, sendo a evocação de uma imagem ou sua apresentação, que, conforme esclarecem as autoras, se dá de maneiras diversificadas, como as apresentações gráficas, um desenho no papel, uma figura na tela do computador ou por meio da própria linguagem, e que expressam as estratégias dos sujeitos nas suas ideias geométricas.

Em sintonia, Hershkowitz (1994) esclarece que a visualização estabelece um papel complexo no processo de desenvolvimento conceitual e atua em duas direções, na qual não é possível formar a imagem de um conceito e sua classe de figuras sem visualizar seus elementos e, por outro lado, caso os elementos visuais sejam restritos e limitados, podem empobrecer a imagem conceitual.

Tratando-se de visualização, há nuances como raciocínio visual, pensamento visual, e elementos como imaginação, intuição, percepção visual e representação, que se relacionam

5 Presmeg (1986, p. 46) define imagem visual como “um esquema mental que descreve informações visual ou espacial”.

na elaboração do processo de visualizar e, como afirma Gutierrez (1991), tem como entidade fundamental as representações mentais que fazemos de objetos físicos, de relações, dos conceitos, entre outras.

Embora alguns autores tenham apresentado perspectivas diferentes quanto à definição de visualização, estas se complementam e apontam o papel da visualização para a construção e desenvolvimento conceitual. Geralmente, estudos que focam na visualização deixam em outro plano a conceitualização e vice-versa. Nossa intenção aqui é mostrar que esses processos se relacionam e, em certa medida, estão imbricados, pois o desenvolvimento da habilidade de visualizar, potencializada pelas manipulações em tela, compõem a construção e o desenvolvimento conceitual. Para entender como esses processos se relacionam vale, inicialmente, trazer uma breve caracterização de conceito.

Entendemos que conceito é a representação mental de uma categoria. E a construção e o desenvolvimento conceitual ocorrem quando um sujeito a partir das suas experiências, consegue elaborar uma imagem mental, visualizar os elementos que abrangem não apenas o caso particular, mas todo uma classe de objetos (FERREIRA, 1963; LOMÔNACO, 1997 *apud* ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018). Nesse âmbito, “os conceitos matemáticos são derivados da sua definição matemática. A definição estabelece um corte claro e preciso na definição entre as instâncias que são exemplos daquele conceito e os exemplos que não são” (HERSHKOWITZ, 1994, p. 57), quer dizer, a definição e o conceito se relacionam, sendo a primeira os limites do segundo.

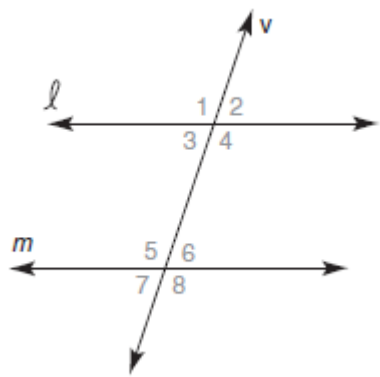
No contexto da Geometria, outro elemento importante na articulação dos processos de visualizar e conceituar é o objeto geométrico. Recorremos a Fischbein (1993), de quem o estudo visa compreender o papel do conceito e da imagem na composição do objeto geométrico. Fischbein (1993) defende que é preciso levar em consideração a definição, a imagem e o conceito figural como categorias de um objeto geométrico. O autor define conceito figural como a construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da geometria, controlada e manipulada por princípios lógicos de um sistema axiomático.

Como esclarece Fischbein (1993), o objeto geométrico depende de uma natureza conceitual e outra figural e é o equilíbrio entre esses dois componentes que permite a noção exata do objeto. Para o autor, da natureza conceitual deriva a ideia geral que expressa a classe de objetos; enquanto, da natureza figural, a imagem mental que é a representação de um objeto ou fenômeno. Para compreender melhor essa relação, é importante destacar que os objetos matemáticos, como ponto, reta, retas paralelas, são modelos ideais de entidades mentais, em que somente em um sentido conceitual é possível considerar a perfeição desses entes. Estes são representações gerais, não existem no mundo físico, são abstrações que pertencem ao domínio dos conceitos, acrescenta o autor.

Vamos considerar o seguinte postulado apresentado em Alexander e Kaeberlein (2013, p. 75): “se duas retas paralelas se cortam por uma transversal, então os ângulos correspondentes

são congruentes”. Esse objeto geométrico é construído por entidades que são abstrações e a validade da relação (ângulos correspondentes congruentes) depende de uma manipulação mental. Vejamos a Figura 1.

Figura 1 – Ângulos correspondentes formados a partir de duas retas paralelas e uma transversal



Fonte: Alexander e Kaeberlein (2013, p. 75)

Imagine que se possa deslocar a reta l de maneira que seja possível sobrepô-la a m, dessa forma veremos que os vértices dos ângulos 1 e 5, por exemplo, coincidirão. Como l e m são retas paralelas, podemos afirmar que os lados dos ângulos também coincidirão de maneira que será verificado a validade da relação. Usando esse mesmo raciocínio, é possível estabelecer outras manipulações a fim de comprovar a validade dos teoremas correlatos desse postulado (ângulos alternos e ângulos colaterais). Nessa manipulação mental, temos envolvidos dois tipos de imagens: a do objeto geométrico formado por duas retas paralelas e uma reta transversal e a da operação, manipulada a partir do deslocamento de uma das retas paralelas com o intuito de verificar a relação matemática.

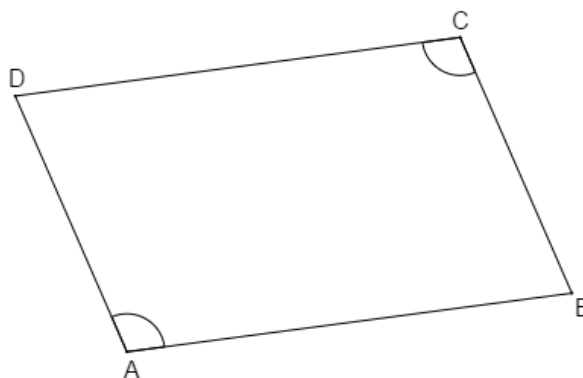
Fischbein alega que conceitos não se movem, não é possível deslocá-los, tampouco, esses objetos existem no mundo físico, são representações em que há uma inter-relação entre o conceitual e o figural. Dessa forma, conforme alega o autor,

[...] os objetos de investigação e manipulação do raciocínio geométrico são então entidades mentais, denominadas conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais, como idealidade, abstração, generalidade e perfeição (FISCHBEIN, 1993, p. 143).

Por outro lado, esse processo exige a habilidade de manipular uma entidade mental, a visualização.

Com essas constatações é possível inferir que a construção e o desenvolvimento conceitual são processos que se relacionam com a visualização a partir da análise do objeto, que possui duas componentes: uma figural e outra conceitual. Vejamos um exemplo que ajuda a elucidar essa afirmação: considere o quadrilátero ABCD, cujos lados opostos são paralelos (Figura 2). Qual a relação entre DAB e BCD?

Figura 2 – Exemplificação de visualização na análise de um objeto geométrico



Fonte: elaboração própria

Como todos os lados são paralelos podemos deduzir que DAB e o ângulo externo adjacente ao ABC são congruentes, pois são correspondentes. Esse processo pode ser visualizado pelo deslocamento do segmento DA sobre as retas que contêm DC e AB. Uma conclusão imediata é que DAB e ABC são colaterais internos. Desta observação implica que DAB e ABC são suplementares e em conclusão DAB e BCD são congruentes.

A proposta de um problema que envolve o desenho de um objeto geométrico parte de questões teóricas atreladas ao objeto, mas a solução representa suposições, pois trata-se de um caso particular. Laborde e Capponi (1994), distinguem desenho geométrico de objeto geométrico. Para os autores, a passagem do primeiro para o segundo depende das experiências prévias do sujeito, o contexto e o sentido formado. Figura geométrica remete a relação entre objeto geométrico e todas as suas representações possíveis (LABORDE, 1998). Dessa forma, podemos definir o desenho de um objeto geométrico como um caso particular no qual sua representação está associada ao conceito que o sujeito possui acerca da teoria tomada como referência.

Como percebemos, ao estudar Geometria o indivíduo aprimora o desempenho cognitivo, lógico-matemático e social, estimulando a imaginação, a intuição e a visualização. Fatores de suma importância para a construção e o desenvolvimento conceitual. Neste cerne, para uma melhor compreensão acerca do ensino e aprendizagem da Geometria, nos colocamos a pensar sobre o seguinte quesito: o aprendizado da Geometria Euclidiana deve seguir a forma hierarquizada na qual ela está organizada?

3. Ângulos entre retas paralelas e uma transversal

Valemos-nos da importância da Geometria destacando a visualização como habilidade necessária ao desenvolvimento cognitivo, algumas implicações teóricas, didáticas e pedagógicas imbricadas aos processos de construção e desenvolvimento conceitual. Em nossa investigação, por representar uma parte substancial da Geometria Euclidiana, focamos no estudo e na análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal.

A Geometria Euclidiana segue uma estrutura que se estabelece a partir de entes primitivos, como ponto, reta e plano; axiomas ou postulados, verdades que se estabelecem por si mesmas; e, definições. Por meio da combinação desses elementos, lançando mão de uma sequência lógica de raciocínio, constroem-se os teoremas (KALEFF, 1994). Mas, para aprender Geometria, é necessário seguir essa hierarquização?

Partindo do estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se abordar teoremas relacionados ao estudo dos triângulos (teorema do ângulo externo e a soma dos ângulos internos); relações existentes em alguns quadriláteros, como a relação entre ângulos opostos ou ângulos adjacentes de um paralelogramo; utilizar as propriedades como alicerce para abordagem de outros conceitos como o teorema de Tales; e, o aprofundamento do próprio tema como na relação entre os ângulos formados por linhas poligonais entre duas paralelas. Todavia, não vemos que seguir essa sequência seja uma condição necessária. É possível (re)visitar outros conceitos como o de retas concorrentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos suplementares, bissetriz e a própria ideia de ângulo, por exemplo.

Em relação a abordagem deste tema, vale destacar que, tradicionalmente, os livros didáticos enfatizam a apresentação de nomenclaturas e a proposta de questões cujo enfoque está muito mais na resolução de equações do que na análise das relações entre os ângulos, apesar da supervalorização de imagens estáticas, sem uma proposta de recursos dinâmicos.

Em uma análise documental, em relação à maneira como o conteúdo retas paralelas cortadas por uma transversal é abordado por livros adotados por escolas públicas do Rio de Janeiro, Martins e Mandarino (2014) constataram que os livros, em geral, apresentam o conteúdo por meio de uma explicação teórica em que as propriedades são apresentadas seguindo seis maneiras distintas de introduzir o conteúdo: medição; exemplificação; algebrização; construção; translação; definição, seguidas de exercícios resolvidos (exercícios modelos) e exercícios de aplicação. Nota-se que é adotada como abordagem a tríade: definição – exercícios modelos – exercícios de aplicação, o que pode ser lido também como o paradigma do exercício, proposto por Skovsmose (2000), partindo da teoria para a prática, o que deixa de evidenciar aspectos inerentes ao pensamento geométrico, o que envolve a visualização, a formulação de conjecturas, a descoberta e o desenvolvimento conceitual.

A forma estática como a geometria é abordada pode ter implicações didáticas e epistemológicas. Fischbein (1993) destaca a importância de explorar aspectos inerentes às propriedades e definições em detrimento de se ater apenas na figura durante a realização de tarefas que envolvam problemas geométricos. Dessa forma, parece-nos mais aceitável que o ensino de geometria seja pautado na manipulação, na exploração, e, por conseguinte, na descoberta a partir da formulação de conjecturas. Em sintonia, Costa (2002) alega que as tecnologias informáticas, e aqui ampliamos para as tecnologias digitais, lançam uma nova perspectiva ao ensino de Geometria, pois colocam nas mãos dos estudantes o poder experimental no desenvolvimento de uma atividade. Deste modo, o foco pode estar na descoberta ou na compreensão de relações, propriedades e teoremas. Esses argumentos nos direcionam para a relevância da aprendizagem

geométrica mediada pelos ambientes de geometria dinâmica, que a nosso ver rompe a lógica Euclidiana por possibilitar uma abordagem descentralizada dessa hierarquia, inclusive por possibilitar a construção de novos conceitos.

Da mesma maneira que a investigação sobre o quinto postulado de Euclides possibilitou o descobrimento de outras geometrias, as investigações em um AGD, inicialmente em computadores e recentemente em DMcTT, como *smartphones* e *tablets*, lançam mão de uma nova geometria que possibilita a construção de novos conceitos a partir da análise de velhos entes geométricos. Como alega Bairral (2018), diferentes tipos de dispositivos geram diferentes *insights* para o nosso aprendizado. A interação com esses possibilita o desenvolvimento ou criação de novos conceitos. A este respeito, o autor esclarece que é possível criar um novo conceito matemático e usa, como exemplo, o caso das operações com medidas de ângulos em graus, minutos e segundos. Diante da possibilidade de um AGD, este tipo de operação não faz sentido, o que se faz necessária é a construção de novas maneiras de explorar as relações entre ângulos e retas, por exemplo (BAIRRAL, 2018). Pode-se também dar maior visibilidade ao estudo dos polígonos não convexos e suas relações, algo pouco valorizado nos livros didáticos.

Por acreditarmos no potencial dessa nova geometria na construção e desenvolvimento conceitual, faremos um breve apanhado de algumas características de um AGD e das particularidades dos AGD em DMcTT.

4. Ambientes, o dinâmico e os toques

Castro-Filho, Freire e Castro (2017), fizeram um breve apanhado histórico das tecnologias (informáticas, da informação e as digitais) no estudo de conceitos matemáticos em vários campos (aritmético, algébrico e geométrico). Segundo os estudiosos, o resgate histórico serviu de base para evidenciar que a aprendizagem de conceitos matemáticos passa pelo experimento de uma variedade de situações. Em relação à informática educativa no ensino e aprendizagem da Geometria, os autores alegam que o desenvolvimento da informática e a aparição de *softwares* como o *Cabri-Géomètre*, inauguraram a geometria dinâmica. Concordamos que a proposta de tarefas variadas potencializa o aprendizado matemático, contudo, entendemos que a dinamicidade proporcionada pelo *software* é um tipo de geometria dinâmica. Trata-se, na verdade, da dinamicidade proporcionada pelos computadores.

Como discutido por Henrique (2017), dinâmico pressupõe movimento. Dessa forma, a geometria proporcionada pelas dobraduras, por exemplo, também é dinâmica. Em complemento, Bairral (2017) esclarece que o dinâmico não está apenas na tecnologia digital, mas no que não é estático. Desse modo, recursos convencionais, como lápis, papel, compasso etc., podem proporcionar aulas dinâmicas. Essa discussão busca esclarecer o significado dessa expressão terminológica presente nos estudos que tratam do ensino e aprendizagem de Geometria, seja em computadores, seja em DMcTT, e aclarar algumas características de um AGD, particularmente aqueles em DMcTT, como o aplicativo GeoGebra na versão para *smartphone*.

Quando falamos do uso de um AGD para a abordagem de conceitos geométricos, não estamos supervalorizando esse recurso em detrimento de outro. Contudo, acreditamos no seu potencial frente a um modelo que supervaloriza a figura do professor e centraliza o conhecimento. Deixe-nos apresentar um exemplo. Vamos relacionar o modelo baseado na definição – exercícios modelos – exercícios de aplicação e uma proposta que valoriza a manipulação e a descoberta com o estudo de um instrumento musical de cordas como o violão.

Imagine a situação na qual uma banda, em um programa de auditório, é solicitada pelo apresentador para acompanhar um cantor na música X sem que tenha sido previamente combinado entre as partes. O que os músicos fazem em situações assim é colocar em prática conceitos que dizem respeito à teoria musical, tais como a identificação do tom da música, o ritmo, a harmonia, a construção do campo harmônico. Essas habilidades podem ser desenvolvidas por um aprendiz cujo estudo não esteja centrado na memorização de um conjunto de regras, como tipos de batidas, e excessivo uso de cifras, e sim na articulação entre teoria e prática e tendo contato com uma variedade de atividades.

De maneira similar, podemos relacionar o estudo baseado na tríade definição – exercícios modelos – exercícios de aplicação com o estudo por memorização de um instrumento e o estudo baseado na experimentação com aquele que oferece mais recursos cognitivos aos alunos. É comum encontrarmos em sala de aula aquele estudante que sabe aplicar uma fórmula para resolução de um exercício, mas tem dificuldade de compreender o mesmo conceito em outros contextos. Ressaltamos a importância de oportunizar a experimentação, a exposição de ideias, o diálogo, as várias representações para ampliar a habilidade de visualização geométrica, a construção e o desenvolvimento conceitual. Recursos distintos devem compor o cenário de aprendizagem a fim de proporcionar novas descobertas, dessa forma, os DMcTT podem ser mais um elemento com possibilidade de proporcionar novas formas de exploração de conceitos e procedimentos (BAIRRAL, 2017).

5. Contribuições e singularidades de um AGD

Autores como Gravina (2001) e Laborde (1998) têm destacado as características e as potencialidades de um AGD⁶. Gravina (2001, p. 82) alega que “[...] os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem”. Em complemento, Laborde (1998) destaca a ação biunívoca que a experimentação com um AGD proporciona. Ao variar os elementos de um objeto geométrico o sujeito obtém o *feedback* do aplicativo, algo que não acontece em uma dinâmica com lápis e papel, por permitir a retroação para a elaboração de conjecturas.

Também Arzarello *et al.* (2002) destacam a possibilidade de experimentações variadas na construção em um AGD que além de permitir uma visão mais ampla de um mesmo objeto, pode

⁶ Embora essas características não sejam para um aplicativo específico, neste texto consideramos o GeoGebra, e quando falamos de AGD e em DMcTT nos dirigimos a sua versão geometria para **smartphones**.

contribuir para o processo de prova de uma conjectura, por dar ao usuário a possibilidade de explicar as conjecturas a fim de identificar propriedades. Os autores também argumentam que os estudantes se apropriam das diferentes modalidades de manuseio (arrastamento) com finalidades distintas, como explorar, formular e validar conjecturas. O que, por outro lado, refuta a falsa sensação de que os alunos podem ser levados a construir um conhecimento matemático baseado em um “ato de fé”, com afirmações do tipo “é verdade porque vi no GeoGebra”. Pode-se, por meio do próprio GeoGebra, explorar a validade das relações e dos teoremas. Além do mais, a verificação em um AGD pode suscitar no aprendiz uma nova curiosidade, questionando-lhe sobre a validade de um resultado e desafiando-lhe a outras funções desempenhadas pela demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (DE VILLIERS, 2001). E, como demonstrou o estudo de Silva (2017), o processo de elaboração de prova em um AGD oportuniza que os estudantes explorem, argumentem e formulem suas conjecturas.

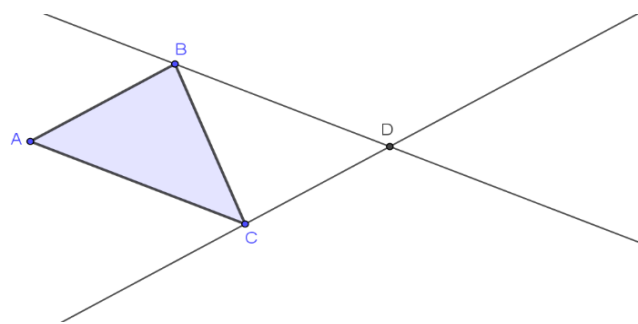
Laborde e Capponi (1994) ressaltam que os conhecimentos matemáticos apresentados em um AGD, em função das limitações, sejam do *software* ou do dispositivo, têm um funcionamento peculiar e em alguns casos distintos daquele conhecimento utilizado como referência. Sobre este fato, deixe-nos dar um exemplo. É recorrente, em análises envolvendo ângulos colaterais internos, os estudantes apresentarem dificuldades em supor a relação matemática envolvida (ângulos suplementares), no caso de uma análise aritmética, dado uma particularidade e limitação do GeoGebra quanto ao número de casas decimais, o que impossibilita, com frequência, que a soma dos ângulos seja dois ângulos retos.

Além dessas características, em um AGD é possível transitar entre o particular e o geral, por este permitir a construção de uma classe de figuras (ARZARELLO et al., 2002). Vejamos mais um exemplo:

- Na Figura 3, para construção do objeto matemático⁷, realizou-se os seguintes passos:
1. Construiu-se o triângulo ABC e as retas CD e BD paralelas à AB e à AC, respectivamente;
 2. Marcou-se a interseção entre as retas (ponto D) e, em seguida, mediu-se os ângulos ABD, BDC, DCA, CAB.

Uma questão interessante a ser analisada é a seguinte: que relações existem entre os ângulos? Expliquem.

Figura 3 – Construção de um quadrilátero a partir de um triângulo e retas paralelas



Fonte: elaboração própria

⁷ Essa proposta foi inspirada em Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Em uma proposta escrita, essa tarefa representa a análise de um caso particular, pois envolve uma figura estática. Para a resolução desse tipo de tarefa é necessário que o aprendiz tenha conhecimento prévio de alguns conceitos, como as relações entre os ângulos colaterais internos e/ou a identificação do tipo de quadrilátero (paralelogramo) envolvido na tarefa. A aplicação das propriedades envolvidas e a tentativa de problematização acaba por se tornar um exercício rotineiro (POLYA, 2006).

A mesma situação proposta para um AGD, na qual pode ser apresentado o objeto geométrico ou os sujeitos podem construí-lo, possibilita a análise do geral, pois é possível construir uma nova figura a cada modificação realizada, o que envolve uma classe de figuras relacionada à propriedade, que além da análise, possibilita a visualização, a intuição, outras representações, a formulação de conjecturas e a descoberta de uma variedade de casos particulares.

Além dessas características, vale destacar que em um AGD, como as construções não são estáticas, o que permite novas alternativas diante de um objeto geométrico, como modificar ou arrastar, pode enriquecer o processo de elaboração e manipulação de uma imagem mental e, por conseguinte, contribuir para o desenvolvimento da visualização (HENRIQUE, 2017).

Destacamos apenas algumas características de AGD em ambientes informatizados e, embora essas características sejam universais, clicar com *mouse* e tocar em uma tela são ações distintas. De acordo com Bairral (2017), as manipulações *touchscreen* estabelecem e inauguram um campo de manifestação da linguagem e da cognição. Os movimentos dos dedos e das mãos compõem e moldam o nosso pensamento. O autor destaca que, embora alguns toques se assemelhem às ações realizadas nos movimentos de clique ou arrasto realizados em um AGD em *desktop*, possuem diferenças em termos de orientação. Enquanto por meio do clique a ação é mediada por uma ferramenta, no DMcTT a ação se dá a partir de uma ação contínua aproximando objeto-sujeito.

Por exemplo, durante a manipulação de um objeto na tela de um DMcTT, realizamos um conjunto de movimentos, alguns dos quais relacionados a conceitos matemáticos específicos, como a ampliação ou redução de uma figura. Realizar essa ação, por meio do clique, arrastando um dos vértices da figura ou por meio do toque, “esticando” a diagonal com o uso de dois dedos, ainda que ambas envolvam o método da diagonal, epistemologicamente são ações distintas (BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2017).

Arzarello, Bairral e Dané (2014) identificaram dois domínios de manipulação, construtivo e relacional, nos processos cognitivos que se articulam durante a ação. Enquanto o domínio construtivo envolve ações básicas, geralmente atreladas às construções e reorganização do objeto geométrico, o relacional tem um cunho mais conjectural, com a intenção de análise e envolve outros elementos exteriores como as interações e a argumentação.

Além das características e singularidades apresentadas acerca de um DMcTT, nossa hipótese é que a percepção visual de quem analisa um objeto com a tela na vertical, no caso dos computadores, pode ser diferente de quem analisa um objeto na tela do *smartphone ou tablet*, cuja

visão é influenciada pela posição da tela, na verdade aproxima-se da verticalidade no caso de computadores *desktop* ou *notebook* e da horizontalidade no caso de DMcTT.

Outra discussão diz respeito ao movimento dos olhos dos sujeitos em interfaces digitais. A direção do olhar em uma tela computadorizada está estritamente relacionada a uma questão cultural, na qual tomamos como referência o sentido da leitura, da esquerda para direita, na cultura ocidental (BRANDÃO, 2006), ponto de congruência em relação ao processamento humano na visualização de imagens na tela de um *smartphone*. Essa observação evidencia ainda mais um ponto de destaque em relação a um AGD: nossas construções e manipulações tendem a seguir essa mesma orientação, contudo, em um DMcTT, a percepção visual, além de ser distinta, é influenciada por meio de sensores de toques mapeados pelo cérebro, pois, como mostrou Damásio (2000), o objeto é processado pelo cérebro em termos sensorial e motor, e seu aprendizado se dá pela categorização em termos conceituais ou linguísticos, cuja recuperação envolve a evocação ou reconhecimento.

As especificidades que apresentamos de um AGD representam contribuições aos processos de ensino e aprendizagem de Geometria e entender que a ação de tocar na tela é diferente de clicar com mouse implica olhar os AGD em DMcTT sob um novo prisma, além de possibilitar a análise de como ocorre o processo de desenvolvimento conceitual a partir do aplicativo GeoGebra. Nossa hipótese é que a mediação que ocorre a partir da análise de um objeto geométrico em um AGD por meio de manipulações em tela, na realização de uma atividade, evidencia a emergência de propriedades intensificando o desenvolvimento da visualização, pois os sujeitos constroem, modificam, (re)criam, compartilham toques e ideias, como uma ação mútua, tudo isso como uma extensão do pensamento no ato de tocar na tela. Com isso, dialogam, argumentam e compartilham suas ideias, o que potencializa a construção e o desenvolvimento conceitual.

Discorreremos até aqui, entre outros tópicos, sobre o papel da visualização, habilidade cognitiva essencial para a vida cotidiana e intrínseca aos processos de raciocínio matemático e de construção e desenvolvimento conceitual. Evidenciamos a importância do estudo das relações entre ângulos e retas e apontamos que os AGD proporcionam uma nova Geometria. Destacamos também como os AGD em DMcTT se diferenciam daqueles em ambientes informatizados e como a visualização e conceituação podem caminhar juntas. Na seção a seguir, apresentaremos um episódio de ensino no qual dois estudantes, com 12 e 13 anos, interagiram, manipularam, visualizaram e intuíram relações entre ângulos e retas na tela do *smartphone* por meio do aplicativo GeoGebra⁸.

8 Versão Geometria – 5.0.485.0. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Link testado em 26 de nov. 2020.

6. Episódio de ensino

A situação pedagógica que selecionamos é parte de um conjunto de implementações⁹ concretizadas no período de fevereiro a junho de 2018 e computaram 21 horas-aula de 50 minutos cada, cujo objetivo centrou-se na análise e identificação das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal por meio do aplicativo GeoGebra em smartphones e foi proposta para uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Oliveira Botelho, localizado no município de Resende (RJ), na disciplina de Resolução de Problemas Matemáticos¹⁰, da qual o autor era o professor regente.

6.1 Visualizando ângulos congruentes e ângulos colaterais

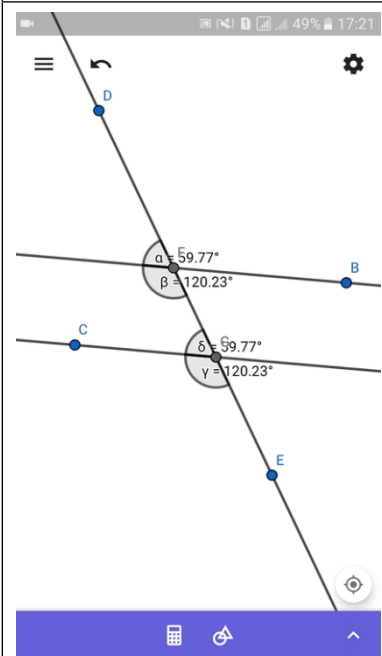
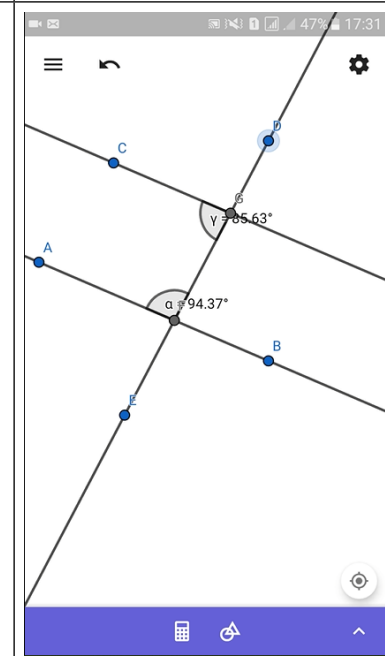
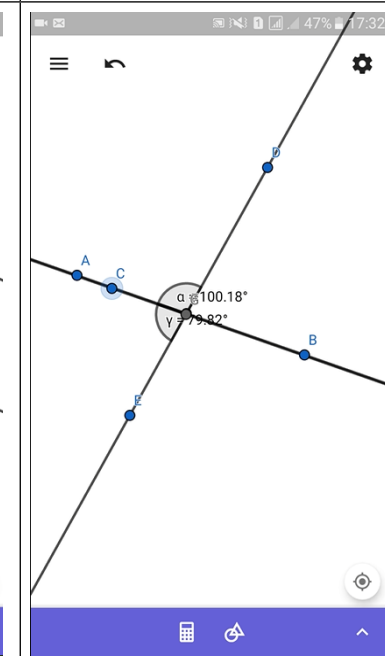
Para análise dessa atividade selecionamos eventos de um vídeo de 17 minutos e 46 segundos obtidos a partir da telagravação¹¹ (ASSIS; HENRIQUE; BAIRRAL, 2020) do smartphone utilizado pelos estudantes GD (12 anos) e MV (13 anos). Nos excertos, os discentes discutem sobre a relação entre ângulos que estão do mesmo lado da transversal (correspondentes e colaterais) e as propriedades envolvidas (congruentes ou suplementares). No Quadro 1, apresentamos os registros obtidos dessa ação.

9 A pesquisa integra o Projeto de Pesquisa Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos touchscreen, financiado pelo CNPq e pela Faperj e está aprovado na Comissão de Ética na Pesquisa da UFRRJ sob o número 604/2015.

10 A Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro lançou em 2013 o currículo mínimo, incluindo a proposta de uma disciplina com enfoque apenas na resolução de problemas. Inicialmente, a proposta contemplava todo o Ensino Fundamental II e o 2º ano do Ensino Médio. Em 2019, porém, a disciplina foi retirada do currículo do Ensino Médio.

11 O neologismo aqui refere-se à gravação em vídeo com áudio a partir da captura das manipulações externas, no caso de uma câmera focando os movimentos e os gestos das mãos dos sujeitos ao tocarem a tela, e as “manipulações internas”, no caso de um vídeo e áudio gerados a partir dos registros realizados na tela do DMCTT envolvido na atividade por meio do aplicativo MyAppSharer.

quadro 1 – Ações dos estudantes na análise de ângulos colaterais interno

Printscreen da tela		
Instante: 00:16:25	Instante: 00:17:15	Instante: 00:17:29
		
Descrição		
Estudantes GD e MV manipulando e visualizando as relações entre os ângulos		

Fonte: material de pesquisa

Por meio da telagravação, o exame do trecho nos possibilitou verificar que a dupla usou o toque de arrasto com uma dupla função: construtiva e relacional. A primeira função teve como objetivo facilitar a análise, para isso eles permutaram as retas CG e AB (Instante: 00:16:53 → Instante: 00:17:15), o que fez com que permanecessem na tela apenas as retas e os ângulos colaterais internos (Instante 00:17:15, ângulos α e γ) e deslocaram a reta CG em direção à reta AB, aproximando os ângulos α e γ . Nesse movimento de arrastar, a ação gerou uma nova construção na qual estavam apenas os objetos de análise. Dessa maneira, na segunda função atribuída ao movimento de arrastar, os estudantes formularam uma conjectura acerca da relação entre os ângulos α e γ (ângulos suplementares, Instante 00:17:29). É importante esclarecer que entre os instantes 00:16:25 e 00:17:15 houve uma pausa na geração do vídeo de aproximadamente dez minutos e, dessa forma, não pudemos observar se nesse intervalo os estudantes estabeleceram outras inferências.

Os discentes poderiam ter estabelecido uma conjectura por meio de uma análise aritmética, adicionando os ângulos α e γ no próprio campo “Entrada” do aplicativo GeoGebra. O que não sabemos é se esse processo conduziria os estudantes à formulação de uma conjectura, pois, como já destacamos, nesse tipo de operação, por conta de uma particularidade do aplicativo, número restrito de casas decimais, a soma se aproxima de 180° . Todavia, observamos que os alunos se apropriaram de uma particularidade de um DMcTT, na qual a ação de arrastar traz imbricadas finalidades distintas, tais como formular e validar conjecturas para estabelecer uma relação entre os ângulos α e γ , transladando a reta CG, sobrepondo-a sobre AB, fazendo-os ficar suplementares, ou seja, eles intuíram uma conjectura visual para ajustar ao seu propósito,

que é um tipo de raciocínio no âmbito relacional.

7. Um olhar para além dos toques

Nossas análises evidenciaram que boa parte das construções e manipulações dos estudantes segue o sentido da leitura e, como já descrito em Bairral, Henrique e Assis (2021), o trabalho com retas e ângulos em manipulações *touchscreen* para formulação de conjecturas permitiu a identificação do surgimento de um novo conceito nesse tipo de estudo: o conceito de referência, onde a variedade, simultaneidade de movimentos e a análise para construção de uma conjectura ocorre tomando como referência o objeto, reta ou ângulo a ser considerado.

O excerto do episódio que selecionamos permitiu a identificação das estratégias elaboradas pelos estudantes e as manipulações se articulando entre os domínios constitutivo e relacional (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014). Observamos também que as construções sempre seguiram a orientação da leitura, indicando que o rastreamento dos movimentos dos olhos possibilita uma análise pormenorizada das manipulações. Todavia, essa análise carece de novos estudos a fim de mapear olhar e toques.

A ação dos estudantes de transladar uma das retas no objeto de análise com intuito de confirmar que a soma dos ângulos α e γ resulta em dois ângulos retos sugere a presença da intuição como um elemento do raciocínio matemático e que a visualização foi potencializada pelos toques na tela do *smartphone*, intensificando o desenvolvimento do conceito de ângulos colaterais internos.

8. Palavras para concluir

Discorremos neste capítulo brevemente sobre o contexto histórico da Geometria e o papel da visualização, habilidade cognitiva essencial para a vida cotidiana e intrínseca aos processos de raciocínio matemático e de construção e desenvolvimento conceitual. Evidenciamos a importância do estudo das relações entre ângulos e retas e o papel de uma nova geometria proporcionada pelos AGD, bem como algumas características e singularidades desses ambientes. Mostramos também como os AGD em DMcTT se diferenciam daqueles em ambientes informatizados, apontando algumas evidências preliminares, como a percepção visual, a direção do olhar e a reconfiguração do nosso cérebro na interação com objeto.

Inferimos a presença da intuição como um tipo de raciocínio matemático, e a visualização potencializada pelos toques na tela, bem como a construção e desenvolvimento conceitual atrelado a este processo. Neste âmbito, a conceituação matemática e a visualização podem se relacionar no surgimento e identificação de relações matemáticas por meio de atividades em um AGD com DMcTT, pois elaboração conceitual e visualização demandam a experiência com o objeto.

Para concluir destacamos que novos olhares ainda comporão as análises futuras, permitindo-nos intuir, conjecturar e visualizar novos conceitos proporcionados por esta nova forma de ensinar e aprender Geometria.

“Eu vou passar a visão!” (RYAN, 2021) Entre visão e vista, entre o que aparece e o que é percebido de uma determinada posição de um objeto, de uma pessoa ou da cena de uma paisagem, a riqueza da linguagem se descortina e traz outros significados para expressões que queremos engessar com definições teóricas. Foi assim que durante as aulas de Desenho Técnico o termo “visão” foi mais empregado do que “vistas”. Do uso coloquial do termo adaptado à definição apresentada em sala de aula, percebemos que não se tratava de uma simples troca, mas de uma abertura de compreensão do tópico vistas ortográficas. Essa visão que nos foi passada é apresentada aqui como etapas constituintes do processo para o desenvolvimento da visualização na disciplina Desenho Básico em experimentações realizadas em uma escola pública da rede estadual do Rio de Janeiro.

Para nós – George e Soraya – professores de Desenho, o registro e a representação têm sido o lugar onde aplicamos a Geometria como prática do manuseio de tecnologias em nossas práticas pedagógicas e pesquisas. O risco, o rabisco, o traçado sobre a folha de papel ou o traço na tela de um dispositivo é o resultado de um processo cognitivo que existe por trás do registro, da representação. Tal processo demanda uma saída física para comunicar uma ideia, que pode ser materializada através de um risco sobre o papel ou do traço na tela de um dispositivo digital (computador, *tablet* ou celular). O pensamento evoca as experiências vivenciadas para chegar à representação e pode utilizar o gesto manual do lápis no papel, assim como os *softwares* dependem de comandos para registrar as inúmeras retas e linhas que concretizam um desenho em suas telas.

Assim como outros colegas da área, estamos preocupados com os processos necessários aos discentes para que o entendimento dos conteúdos da disciplina, o desenvolvimento do raciocínio espacial e a produção das representações gráficas oriundas dos estudos projetivos, transcorram de maneira consciente, significativa, sem traumas ou sofrimentos. Um desses processos é a visualização.

A visualização não é inata. Necessita ser instigada, incrementada. É uma habilidade que precisa ser estimulada e deveria ser desenvolvida em todos os níveis da educação básica. É imprescindível para os estudos projetivos desenvolvidos nas disciplinas relacionadas à representação gráfica e projetos nos cursos profissionalizantes de nível médio, visto que a representação gráfica através de desenhos ou imagens é uma maneira simples e eficaz para comunicar ideias.

De maneira mais ampla, a visualização contribui para que o cidadão possa entender e desenvolver mentalmente questões de diferentes graus de complexidade presentes em seu

12 Este texto é uma revisita ao tema da comunicação apresentada no I Seminário Pesquisas e Práticas Pedagógicas – Linguagem Visual e Educação Básica, I SEMINÁRIO LEDEN, realizado no CAp-UERJ em setembro de 2007, Rio de Janeiro.

13 FAETEC. Contato: georgebravo.br@gmail.com

14 CAp-UERJ, CP2. Contato: soizar@gmail.com

cotidiano. Também conhecida como percepção visual, percepção espacial, imaginação espacial, visão espacial e visualização espacial; a visualização é importante em inúmeras atividades da vida, não se restringindo ao aprendizado escolar ou à Geometria (GUTIERREZ, 1991). Em sintonia com Gutierrez (1991), Kaleff (2016a) destaca que a visualização, incluindo a leitura, a escrita e a interpretação de informações gráficas, é a “principal habilidade com a qual a Geometria pode contribuir para a preparação de cidadãos mais aptos à vida em uma sociedade do século XXI” (KALEFF, 2016a, p. 10). Kaleff (2016a) ressalta ainda que a visualização está cada vez mais conectada ao mundo virtual da computação e aos estímulos visuais na forma de imagens e de suas múltiplas representações: do desenho geométrico aos gráficos cartesianos, dos esquemas gráficos às tabelas etc.

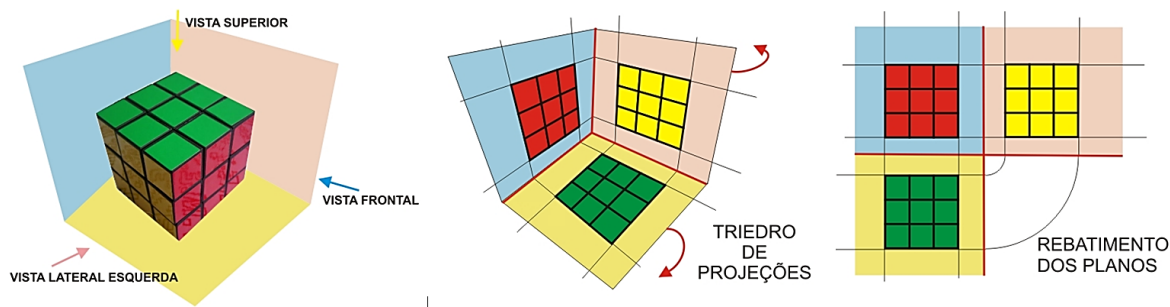
Gutierrez (1991) observa que o componente central em todas as concepções de visualização são as imagens mentais, ou seja, as representações mentais elaboradas de objetos físicos, relacionamentos, conceitos etc., destacando os estudos de Presmeg (1986) e Bishop (1989). Del Grande (1990) detalhou as propostas de vários autores sobre as habilidades que podem contribuir com a visualização de um indivíduo: a coordenação motora dos olhos (capacidade de seguir com os olhos o movimento dos objetos de forma ágil e eficaz), a identificação visual (capacidade de reconhecer uma figura removendo-a de seu contexto, por exemplo, quando a figura é composta de várias partes, como em telhas, ou quando há múltiplas figuras sobrepostas), a identificação da percepção (capacidade de reconhecer que um objeto mantém sua forma mesmo que não seja mais total ou parcialmente visível), o reconhecimento das posições no espaço (capacidade de relacionar a posição de um objeto a si mesmo – o observador – ou a outro objeto, que age como um ponto de referência), o reconhecimento das relações espaciais (capacidade de identificar corretamente as características das relações entre vários objetos localizados no espaço, por exemplo, se são rotacionados, perpendiculares, simétricos, etc.), a discriminação visual (capacidade de comparar vários objetos identificando suas semelhanças e diferenças visuais), a memória visual (capacidade de lembrar as características visuais e a posição que tinha, em um determinado momento, um conjunto de objetos que estavam à vista, mas que não são mais vistos ou que foram alterados de posição). Todas essas habilidades podem e devem ser desenvolvidas ao longo da educação básica. Quando não o são, devem ser trabalhadas em algum momento. No caso dos cursos técnicos profissionalizantes, precisam ser trabalhadas no decorrer dos semestres ou anos letivos, pois são indispensáveis para os estudantes na disciplina Desenho Técnico e imprescindíveis para a capacidade de visualização geral do profissional que está em formação.

O desenvolvimento da visualização espacial prescinde de exercícios que estimulem a observação de modelos físicos, a análise e a interpretação da forma e da dimensão. Atividades fundamentais para que possam ser elaboradas as representações gráficas procedentes dos estudos projetivos.

Enquanto estudantes de Geometria Descritiva e de Desenho Técnico na graduação,

percebíamos que um dos entraves na visualização era a problemática da transposição do tridimensional para o bidimensional, ou seja, a representação do objeto físico através das projeções, as vistas ortográficas, ou através da perspectiva. Quando um simples triedro de papelão era colocado diante dos alunos, mostrando o conjunto triedro-objeto a ser analisado, o entendimento do processo se iniciava. Um recurso manipulativo que instigava o processo de visualização daquela situação projetiva. Assim, inicialmente, utilizávamos recursos físicos como peças de madeira e um triedro de compensado que mostrasse ao estudante a divisão do espaço, simulando os planos vertical, horizontal e lateral de projeção, superfícies onde as vistas seriam projetadas e posteriormente visualizadas. As peças eram posicionadas no espaço definido pelo triedro de madeira, onde desenhávamos as vistas de cada face da peça com giz nos planos de madeira do triedro. Para simular como a é pura surgia, girávamos cada face do triedro até que elas ficassem no mesmo plano (Figura 4).

Figura 4– Triedro – Projeções - É pura.



Fonte: adaptado de Oliveira (2016).

A utilização desse simples recurso já promovia uma revolução na formação das imagens mentais, facilitando a transposição do espaço para a representação plana, impulsionando o processo de visualização. Também mostrávamos outras formas de simular o triedro de planos de projeção, utilizando a capa de cadernos ou livros, as antigas capinhas plásticas de CD, parte de caixas de papelão ou mesmo dois cartões retangulares de papelão ou de acetato encaixados ortogonalmente (Figura 5). O material concreto auxilia no processo de visualização (DEL GRANDE, 1990; KALEFF, 2016a) e no entendimento das diversas formas de representação gráfica presentes no desenho técnico.

Figura 5 – Modelos de Triedro.



Fonte: Oliveira (2016, p. 62)

Inicialmente, tínhamos dificuldade em motivar os estudantes a enxergar o que eles

sempre veem, mas para qual precisam ser despertados. Entendemos que os verbos “enxergar” e “ver”, sinônimos em nossa língua, possuem acepções diferentes. Enxergar vai além do ver, isto é, enxergar é ver com significado, buscando elementos que aprofundem o ver. Essa diferença nos aproxima do significado do termo visualizar.

No ensino técnico profissionalizante, é necessário o entendimento das representações gráficas presentes em diferentes formas de comunicação técnica. Também é solicitado dos estudantes o desenvolvimento das técnicas de representação que os habilitem a projetar, representar peças, partes de peças ou de conjuntos de naturezas distintas (arquitetônicos, mecânicos etc.), competências exigidas dos profissionais no mercado de trabalho. A carência de atividades que desenvolvam a visualização no decorrer da Educação Básica pode dificultar o entendimento dos estudos introdutórios sobre Geometria Espacial e sobre noções básicas de projeções.

Em nossa experiência com estudantes que ingressam na Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá (ETEVIM), da Fundação de Apoio à Escola Técnica (FAETEC), percebemos que a formação da maioria, do ponto de vista dos conteúdos, era bastante heterogênea. Oriundos de escolas da rede municipal, estadual e particular de ensino do município do Rio de Janeiro e de municípios vizinhos, necessitavam de uma revisão de conteúdos específicos de Geometria, visando um melhor desempenho na disciplina Desenho no Ensino Médio. Nesse contexto, a proposta do módulo de Desenho Básico da ETEVM era desenvolver conteúdos de Desenho Geométrico com estes aprendizes para, posteriormente, apresentar, conceituar e desenvolver os conteúdos de Desenho Projetivo, momento muito propício e importante para o desenvolvimento de atividades que estimulem a visualização.

Alguns estudantes demonstram resistência à aula de Desenho, pois relacionam o desenhar com aptidão, com “jeito”. Devido à obrigatoriedade, aqueles que acreditam não ter aptidão acabam cursando a disciplina apenas para obter um grau que os aproveem. Acostumados com a cobrança acompanhada pela censura de não “desenhar bem”, chegam para a aula sem estímulo, tornando mais difícil a tentativa dos docentes em aproveitar seus conhecimentos prévios. O esforço dos professores concentra-se em mostrar a necessidade do ato de desenhar e motivá-los. Enfatizar que o desenho é uma forma de comunicação universal; uma das formas de interagir com o mundo. Por isso, é necessário aprender a identificar as imagens que nos cercam, percebendo os significados dentro de cada contexto: artístico, técnico, publicitário.

Começamos mostrando aos aprendizes a imensa e diversa quantidade de imagens impressas e digitais disponível nos livros, na internet, nos outdoors, nos programas gráficos. Embora essas imagens estejam presentes em nosso cotidiano, nem sempre percebemos a natureza da representação, ou seja, que os objetos das imagens são objetos tridimensionais representados em uma folha de papel ou na tela de um dispositivo eletrônico, em uma superfície plana (bidimensional). Não é usual pararmos para pensar sobre esses quesitos ou identificar o processo de construção dessas imagens. Entretanto, ressaltar tais peculiaridades faz parte do processo de formação de imagens mentais. Por isso, em nosso primeiro contato em sala de aula,

apresentamos objetos de diferentes formas, seus contextos e representações em diferentes áreas do conhecimento, conforme ilustra a Figura 6, fazendo releituras deste vasto mundo de formas e representações gráficas.

Figura 6 – Diferentes representações gráficas



Fonte: Cartaz publicitário da Coca-Cola, Cartaz da 16ª Bienal SP, Imagem de Notebook

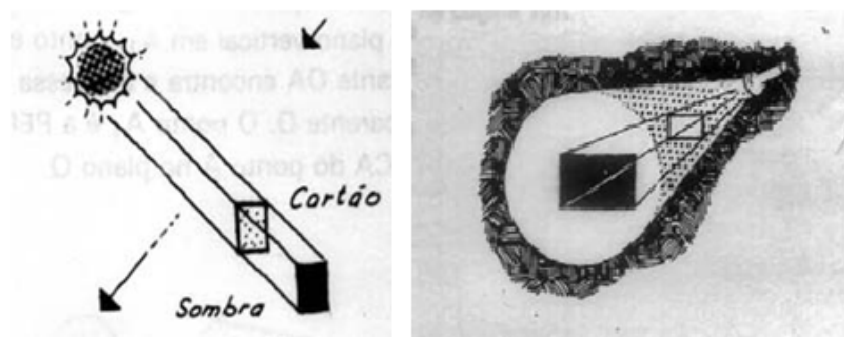
A observação é grande parceira do processo de visualização. Para trabalhar o conteúdo de sistemas de representações, convidamos os estudantes a sair da sala de aula e observar o que a paisagem nos oferece e, principalmente, reparar nas sombras resultantes da incidência da luz do sol. Depois, ao voltarmos para a sala, convidávamos os discentes a analisar as sombras projetadas pela incidência de uma fonte luminosa pontual, como uma lanterna (Figura 7). Dessa forma, as trocas de observações e impressões geravam relatos importantes para o desenvolvimento dos conceitos de projeção cilíndrica ou paralela e projeção cônica, conforme Montenegro (1990) ilustra na Figura 8.

Figura 7 – Fotos da Rampa de acesso às salas de desenho da ETEVM e de experiência com a luz do sol e de uma lanterna



Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

Figura 8 – Ilustrações da projeção cilíndrica e projeção cônica



Fonte: Montenegro (1990, p. 17).

A produção das vistas ortográficas através da observação de modelos tridimensionais é um processo que requer habilidade para executar mentalmente a transposição de uma situação não plana para a representação plana. A utilização de peças de dimensões e formatos variados com o objetivo de estimular os estudantes a visualizar as vistas de cada face desses modelos e, posteriormente, representá-las no papel não é algo novo. É uma estratégia antiga, porém, importante para o processo de visualização. Entretanto queríamos utilizar modelos que fossem mais significativos para os discentes, que os envolvessem de modo a tornar o conteúdo menos denso e mais produtivo. Por isso escolhemos utilizar nas atividades iniciais objetos e imagens de objetos que estivessem presentes no cotidiano desses estudantes, que de alguma forma que lhes fossem significativos. Por isso, além de utilizar modelos físicos tradicionais (Figura 9) para o desenho nas aulas, procuramos incluir aqueles relacionados à realidade escolar ou à realidade dos aprendizes, visando facilitar o entendimento do processo. Acreditamos que a troca de experiências é mais proveitosa quando o discente desenha objetos que são mais significativos e não apenas modelos de madeira cuja função não é conhecida (Figura 9). Assim, o questionamento: “para que serve esta peça?” e a habitual resposta: “é apenas uma peça de estudo” não seria tão frequente. Uma resposta que não atende às expectativas do estudante e, muitas vezes, também não atende a do professor.

Figura 9 – Peças em madeira existentes na escola reproduzidas de Pereira (1981).



Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

Através de esboços simples e rudimentares, iniciamos a representação com as “visões” (termo empregado por alguns alunos como sinônimo de vistas ortográficas), objetivando explorar o conceito de projeção através da observação dos objetos.

O que antes dependia de uma introdução teórica para os conceitos básicos da Geometria Descritiva foi substituído por experiências mais simples de observação e vivência dos conceitos. As peças de madeira foram substituídas por caixas, embalagens de produtos diversos que estão presentes em nosso dia a dia e até brinquedos de montar do tipo LEGO (Figura 10).

Figura 10 – Peças de estudo montadas com LEGO¹⁵ ou com embalagens diversas



Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

Para uma aula inicial sobre vistas ortográficas, experimentamos usar objetos da própria sala de aula e dos alunos: caneta, caixas de giz, garrafa de água mineral, lixeira da sala, entre outros que estivessem ao alcance. Acreditamos que, ao utilizar objetos próximos ao cotidiano dos alunos, poderíamos aplicar os mesmos conteúdos, que eram anteriormente desenvolvidos com as peças de madeira, sem prejuízo ao processo ensino-aprendizagem. Iniciamos com modelos prismáticos, como a caixa de giz, para posterior e gradativamente variar o formato e o nível de dificuldade dos modelos, exigindo maior grau de atenção e uma observação mais apurada.

Utilizamos também as embalagens dos sucos entregues nos lanches dos estudantes como modelos para os desenhos das vistas ortográficas. As embalagens possuíam inscrições e detalhes que favoreciam e ajudavam no processo de visualização e identificação das vistas. A “visão” da caixa de suco resulta em um retângulo, as arestas que representam a largura da caixa (retas de topo) viram pontos; a sombra da lapiseira, quando iluminada por cima, é um círculo. Cada vista é uma imagem parcial do objeto, ou seja, a vista ou “visão” de cada face do objeto (Figura 11).

Figura 11 – Caixa do suco e o resultado da observação das faces: Vista Frontal, Lateral e Superior.



Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

É importante destacar que aquele retângulo desenhado na vista frontal foi resultado da observação da caixinha de suco que o discente bebeu no lanche e o círculo desenhado no caderno é a representação da vista superior da lapiseira que está produzindo os desenhos. De maneira quase lúdica, porém significativa, os alunos conceituam as vistas ortográficas: frontal, superior e lateral de um objeto (Figura 12).

15 Lego, criado pelo dinamarquês Ole Kirk Kristiansen, é um brinquedo composto de partes encaixáveis originando várias combinações.

Figura 12 – Vistas Ortográficas Principais da Caixinha de Suco



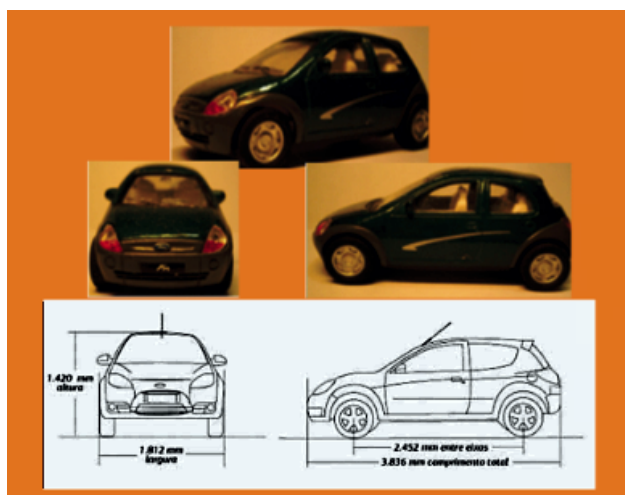
Fonte: Arquivo fotográfico do autor.

Os estudantes começaram a produzir as representações das vistas ortográficas mais rapidamente, o que nos incentivava a escolher outros modelos para novas “visões” das faces dos objetos. Experimentamos utilizar brinquedos como modelos: carrinhos, cubo mágico, bonequinhos Playmobil¹⁶ e, posteriormente, os celulares, que passaram a ser os modelos preferenciais. Os rápidos resultados obtidos através dessa contextualização nos fizeram repensar a sequência do conteúdo programático. Na abordagem tradicional (projeção de pontos, retas, planos), demorávamos para iniciar o conteúdo das vistas ortográficas e o tempo que restava para exercitar era exíguo. Com o agrupamento dos conteúdos afins, continuaríamos a desenvolver a visualização, estimularíamos os estudantes a desenhar e mostraríamos o desenho como recurso de comunicação técnica. Era necessário algo que estimulasse a vontade de desenhar e que fizesse a conexão com a necessidade de utilizar o desenho como linguagem para criar imagens de comunicação. Essa percepção não foi descoberta tão facilmente. Foi o resultado da troca de experiências entre os professores de Desenho da escola, do aprimoramento pedagógico, da prática e pesquisa de alguns colegas. Também fomos inspirados por Montenegro (1991), que aborda de forma muito leve e peculiar o conteúdo da Geometria Descritiva.

Paralelamente aos exercícios de vistas ortográficas, foi possível trabalhar o conceito de escala: natural, de redução e de ampliação. Ensinar o estudante a observar a relação entre as dimensões do desenho e do objeto a ser desejado e escolher a escala mais adequada para o desenho quando for o caso. Mostrar como é possível estruturar a relação (razão) entre as medidas do desenho e as do objeto desenhado usando uma simples régua e calcular o fator resultante desta relação, sem depender apenas da utilização do instrumento escalímetro. Nesta etapa incluímos o conteúdo sobre cotagem (processo para indicar as medidas reais do objeto representado em escala nos desenhos) e suas regras elementares (Figura 13).

¹⁶ Playmobil, brinquedo criado por Hans Beck (1929-2009), consiste em pequenos bonecos com partes móveis e objetos aos quais esses bonecos podem se integrar e compor cenários de temática específica.

Figura 13 – Vistas Ortográficas e Cotagem



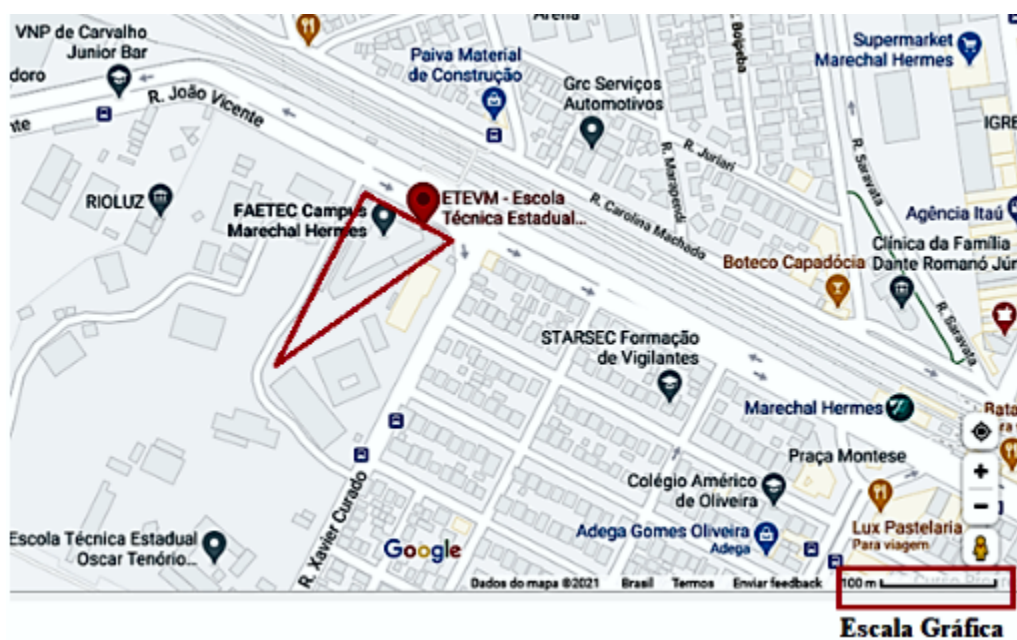
Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

Após o exercício de representar objetos presentes na sala de aula, fazendo a relação direta entre as dimensões do objeto desenhado e as dimensões do desenho do objeto, já era possível evoluir para outra etapa de atividades e recorrer a objetos que não estão mais ao alcance dos olhos e sim de nossa memória. Objetos como móveis e eletrodomésticos das casas dos estudantes: geladeira, fogão, cama, armário e outros exemplos foram usados para exemplificar as vistas e escalas de representação, com o objetivo de preparar os alunos para desenvolver a tarefa de representar objetos visualizados na memória.

A proposta seguinte à tarefa executada em sala de aula teve como objetivo medir um compartimento da casa do estudante e alguns móveis para que pudessem ser trabalhados outros tópicos do conteúdo programático da disciplina: escalas e cotagem. Foi solicitado que expressassem as dimensões dos objetos em metros, centímetros e milímetros e calculassem o tamanho dos desenhos nas escalas de redução de 1:100 e 1:50. A representação em papel feita com auxílio de uma régua graduada comum e os desenhos foram feitos à mão livre (sem o auxílio do par de esquadros), uma preparação para o próximo passo: perceber a necessidade da precisão e do uso dos instrumentos para comunicação.

Para explorar outros modos de emprego de escalas, recorreremos ao aplicativo Google Maps, objetivando levar o estudante a visualizar a localização geográfica do espaço escolar (vista superior do mapa) e trabalhar com conceito de escalas gráficas presente no aplicativo. Através do próprio celular ou em imagem projetada em uma tela em sala de aula, o estudante visualiza o entorno do ambiente escolar, identifica ruas e lugares conhecidos e observa as variações das escalas do mapa, inclusive da escala gráfica (Figura 14).

Figura 14 – Escalas com o Google Maps



Fonte: Adaptado do Google Maps.

Na segunda fase desta experiência, desenvolvemos o desenho definitivo com os esboços trazidos pelos discentes. Após a verificação dos resultados alcançados, ajustes e correções dos esboços, explicamos como manusear os instrumentos, particularmente o traçado de retas paralelas, perpendiculares e oblíquas (com o par de esquadros), para desenvolvimento do desenho técnico enquanto forma de comunicação entre o projetista e o executor do projeto.

A atividade foi enriquecida com a inclusão de outros modelos, como imagens de armários e arquivos obtidos em folhetos de lojas de móveis, em que o estudante pode aplicar vários conceitos geométricos do conteúdo programático, tais como o da divisão de segmentos em partes iguais e proporcionais. Com este tipo de exercício, os alunos passaram a enxergar a aplicação dos conceitos de geometria em objetos do seu cotidiano. A produção de imagens passa por um processo mais aplicado, tornando a abstração dos problemas algo mais próximo do universo do estudante.

O esboço, o desenho feito à mão e o desenho com instrumentos foram valorizados em nossa experimentação pedagógica como registros de um processo cognitivo que foi evoluindo gradativamente. O desenho feito à mão e o desenho auxiliado pelo computador são registros que necessitam da visualização. Os exercícios realizados manualmente no âmbito da disciplina Desenho Básico contribuem para o desempenho dos estudantes que, mais tarde, escolhem estudar a utilização de programas gráficos relacionados ao desenho técnico, como o Autocad, o Solidworks, dentre outros.

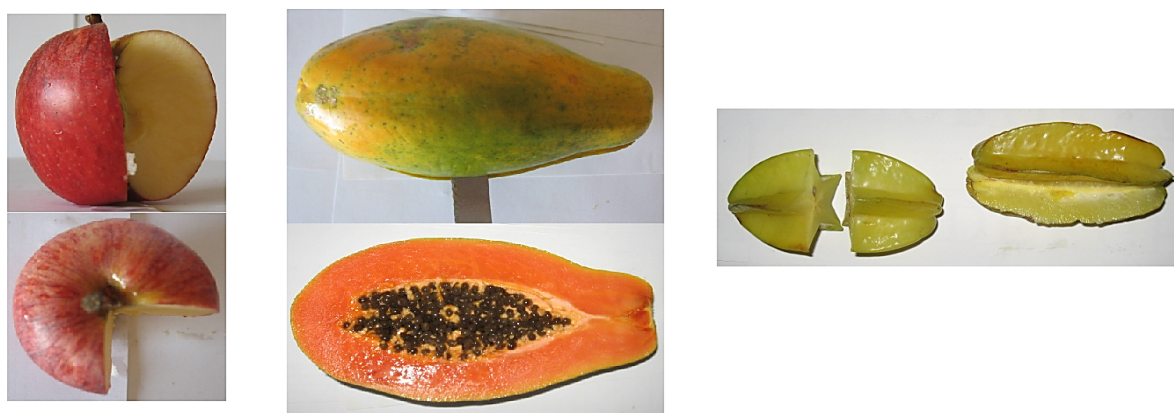
O estudo das vistas ortográficas respalda o desenvolvimento do conteúdo subsequente: as vistas seccionais também conhecidas por cortes. Seguindo a mesma estratégia, podemos utilizar modelos diferenciados para auxiliar na visualização dessas vistas¹⁷. Ao contextualizarmos com frutas, pães (francês, de forma) e bolos, os estudantes podem visualizar cada tipo de seção estudada através de cortes obtidos em cada fruta, pão ou bolo. Conforme ilustrado na Figura 15, o corte total longitudinal, feito ao longo do comprimento do mamão; o corte total transversal, feito ao longo da largura da carambola; ou o meio corte, feito na metade direita da

¹⁷ Uma sugestão muito interessante do caro professor doutor Cláudio César Pinto Soares do Curso de Especialização em Técnicas de Representação Gráficas da EBA/UFRJ.

maçã, devido a seu formato simétrico. Ao final da aula, participávamos de um lanche coletivo, com sanduíches, bolos e frutas que foram utilizados como modelos durante a aula de cortes.

Um momento de interação pedagógica único que ficou registrado na memória afetiva dos discentes. Essa estratégia mostrou-se muito profícua quanto ao processo de visualização das vistas seccionais, considerando-se o significado dos modelos para os estudantes, contribuindo positivamente para o aprendizado dos vários tipos de corte utilizados no Desenho Técnico.

Figura 15 – Frutas como modelos das Vistas Seccionais



Fonte: Arquivo fotográfico da autora.

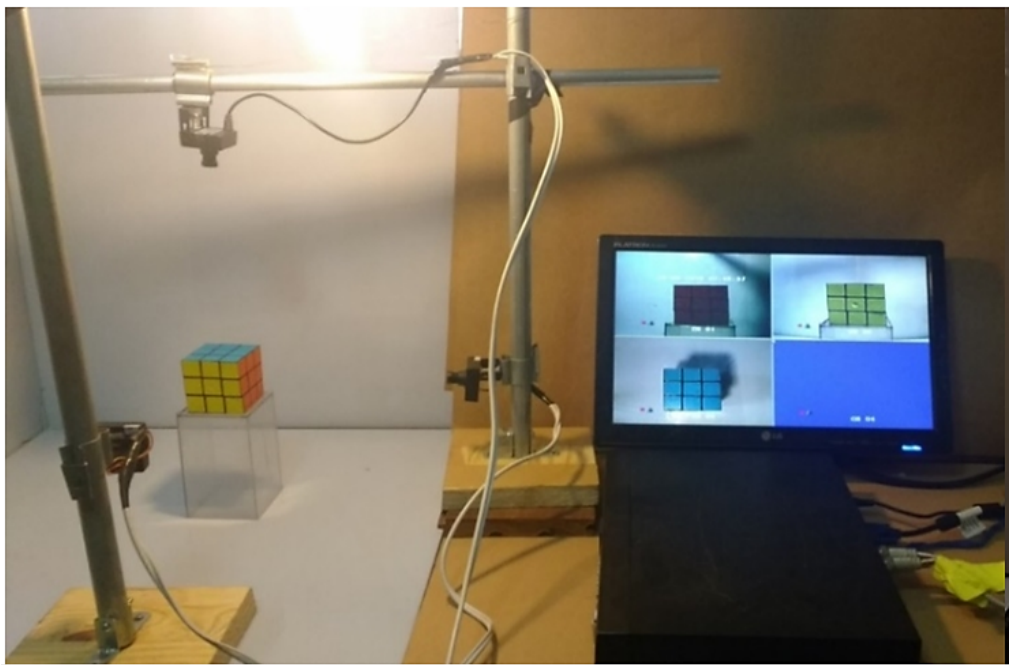
A ETEVM, como a maioria das escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro, possui escassos recursos de equipamentos em todos os setores, inclusive no de Informática. Por isso acreditamos na necessidade de investimento no capital humano dos estudantes e no desenvolvimento de habilidades relacionadas à capacidade de raciocínio lógico, espacial, instrumental e, particularmente, no processo de visualização. A visualização é essencial para o registro imagético, independente do suporte escolhido. Procuramos trabalhar atividades que objetivam desenvolver tais habilidades com os recursos que possuímos: pranchetas, quadro de giz, papel, régua, lápis, borracha. Os conceitos básicos foram desenvolvidos para que os estudantes possam estar aptos a trabalharem com os recursos tecnológicos relacionados à computação gráfica em um segundo momento. Esta experiência quer demonstrar e ressaltar a qualidade do desenvolvimento de habilidades em pessoas que acreditavam não ter capacidade para criar imagens gráficas.

A experiência mostrou-se frutífera em muitos aspectos. A comunicação entre professores e estudantes fluiu de forma mais eficiente e a relação professor-estudante ficou mais estreita. Os estudantes que participaram da proposta demonstraram possuir menos lacunas de conteúdos e mais segurança em relação aos conteúdos mínimos imprescindíveis para um melhor desempenho no módulo seguinte: Desenho Técnico I.

Além de mostrar-se eficiente, essa experiência de desenvolvimento da visualização com atividades de observação através de modelos mais significativos para os discentes nos motiva a buscar novas ideias e contextualizações. Também estimula a reflexão sobre novas propostas de atividades, pesquisa sobre novos recursos disponíveis e outras possibilidades de modelos de peças para o trabalho com os estudantes.

Esta proposta inspirou a dissertação (OLIVEIRA, 2016) e o desenvolvimento de um equipamento para visualização das vistas ortográficas que utiliza três câmaras de segurança para obter simultaneamente as vistas principais de um objeto estudado (Figura 16). Atualmente, esse equipamento é utilizado na ETEVM e tem contribuído para o desenvolvimento da visualização das vistas ortográficas durante as aulas de Desenho Básico.

Figura 16 – Equipamento para visualização das e vistas principais de um objeto



Fonte: Arquivo fotográfico dos autores.

Esta experiência se originou de uma proposta pedagógica que investigava novas maneiras de ensinar. Acreditamos que é preciso pesquisar novas propostas que viabilizem o processo de ensino, dinamizem o processo de aprendizagem e que nos aproximem dos alunos. Ações que nos levem a observar e analisar cada etapa de cada um dos processos, objetivando um ensino e um aprendizado mais rico e eficiente. Propostas que continuem promovendo o desenvolvimento da visualização não apenas para as disciplinas gráficas ou para o ensino da Geometria, mas que preparem o cidadão para utilizá-la em qualquer área do conhecimento que lhe seja útil e que também lhe seja útil para uma vida melhor em sociedade.

A VISUALIZAÇÃO E A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS DOS LICENCIADOS EM PEDAGOGIA

Rosana de Oliveira¹⁸

Andreia Carvalho Maciel Barbosa¹⁹

1. Introdução

A discussão abordada neste capítulo tem permeado a prática pedagógica das autoras no trabalho desenvolvido com licenciandos em pedagogia, na modalidade à distância, em duas disciplinas que integram a matriz curricular deste curso: Matemática na Educação 1 e 2 da Faculdade de Educação da UERJ – Consórcio CEDERJ – UAB.

Em 2004, a produção do material didático destinado a essas disciplinas já indicava uma forte preocupação com o uso de representações pictóricas e figuras que pudessem contribuir com a produção de conhecimento matemático.

Os avanços tecnológicos no trato das imagens estão presentes nos livros didáticos que, a partir da criação/implementação do PNLD, receberam uma significativa quantidade de imagens ao apresentarem os conteúdos, os conceitos, as atividades e os exercícios. Porém, em alguns casos, essas imagens são apenas ilustrativas, têm o objetivo de tornar lúdica e leve a apresentação dos conteúdos, mas não necessariamente contribuem para a aprendizagem.

Os aspectos visuais das propostas didáticas oferecidas aos estudantes devem ter uma perspectiva metodológica associada, ou seja, devem favorecer a produção de significados matemáticos. Uma das maneiras de favorecer esse processo é com o uso denominado neste artigo de *esquemas*, na proposição de tarefas matemáticas, que contribuem com o processo de visualização. Acreditamos ser uma importante estratégia, adequada à formação dos futuros professores, que devem vivenciar experiências que permitam se apropriar dos sentidos para compartilhá-los com seus futuros alunos. Defendemos, na formação, uma abordagem que trabalhe os conteúdos matemáticos em paralelo com a metodologia.

Ao longo dos anos, coerente com o Material Didático, ao ministrar essas disciplinas, temos proposto, nos diferentes tipos de avaliações e materiais complementares, tarefas que explorem a resolução de problemas. Nas tarefas desenvolvidas, um de nossos objetivos é que os licenciandos usem os *esquemas* para resolver os problemas propostos, ou seja, aprendam a usá-los como ferramenta na resolução de problemas. Além disso, nossa proposta pretende que, além desta utilização, o licenciando a compreenda como metodologia de ensino, para que futuramente incorpore esses usos em sua prática pedagógica.

Entretanto, observamos, com o passar dos anos, que para alguns estudantes essa ferramenta não produz sentidos ou não está explicitada na solução das tarefas propostas. Em virtude desse fato, nos propusemos a investigar as causas e justificativas do porquê disso ocorrer. O caminho escolhido foi o de buscar identificar como os licenciandos em pedagogia compreendem e se

18 UERJ. Contato: rosanaol40@yahoo.com.br

19 CPII. Contato: andreiamaciel@gmail.com

expressam quando resolvem tarefas utilizando uma abordagem com ênfase nos processos de visualização. Especificamente, investigamos a associação entre o conceito de visualização e o conhecimento sobre números e operações. Em nossa perspectiva, só temos acesso ao que o estudante “vê” através da linguagem. Esse processo se desenvolve quando ele observa, identifica padrões e relaciona diversas representações.

Para desenvolver esta investigação, discutiremos o processo de visualização de forma geral, trazendo as contribuições de diferentes autores tais como: Bishop (1989), Zimmermann e Cunningham (1991), Guzman (1993), Nemirovsky e Noble (1997), Goldenberg (1998), Arcavi (2003) e dialogamos com Lins (1999; 2012) e Castro e Frant (2011), refletindo especificamente sobre o uso de *esquema* nas operações de adição e subtração de números naturais e racionais. Em seguida, apresentaremos as Avaliações Complementares, destacando as tarefas que foram objeto de nossa análise. Criamos, a partir da leitura sensível das respostas dos licenciandos, categorias de análise dos aspectos de visualização encontrados na pesquisa. Nas Considerações Finais, resgataremos um diálogo entre os objetivos iniciais e os resultados, apontando possíveis lacunas que não puderam ser contempladas no âmbito desta pesquisa.

2. A visualização na formação de professores

Há muitos estudos que procuram relacionar a visualização e o conhecimento, em particular, o conhecimento matemático. Aqui traremos alguns autores que se distanciam do que defendemos como visualização e outros autores que se aproximam da perspectiva que estamos adotando.

Jean Piaget aborda em sua obra a formação das imagens mentais e o conhecimento matemático. De acordo com Montoya (2005), Piaget apresenta uma evolução na função dessas imagens que fazem parte dos esquemas²⁰ da inteligência sensório-motora que, por sua vez, precedem os esquemas conceituais. Ainda de acordo com o autor, no decorrer de sua obra, Piaget preocupa-se em relacionar a imagem mental e as operações intelectuais.

[...] a imagem mental não é fonte nem fator que contribui diretamente na preparação da operação e do conceito. Entretanto, apesar desses limites, a imagem é essencial enquanto função simbólica que reporta às particularidades dos objetos ausentes, nos seus estados e configurações. (MONTTOYA, 2005, p. 65).

Muitos pesquisadores associam a visualização à formação de imagens mentais com significados diferentes, tais como Bishop (1989), Zimmermann e Cunningham (1991), Guzman (1993), Nemirovsky e Noble (1997), Goldenberg (1998) e Duval (2006).

Duval (2006) associa a visualização a uma atividade cognitiva, ou seja, a uma percepção semiótica, e relaciona a compreensão da aprendizagem aos registros semióticos produzidos.

20 O termo esquemas aparece na visão de Piaget que significa “esquemas são estruturas ou conceitos que usamos para interpretar e organizar as informações que recebemos” (AZEVEDO, 2021, p. 1).

Acreditamos que essas visões contribuem para a compreensão de aprendizagens matemáticas, mas interpretamos que essas concepções de visualização estão relacionadas a uma forma de compreender um conceito matemático como algo exterior ao sujeito, em uma associação com a definição de um objeto matemático, ou, ainda, que agrega elementos à definição.

Defendemos que um conceito tem uma perspectiva mais ampla em termos de aprendizagens matemáticas e se adequa à compreensão de visualização como um processo, associado a uma atividade. Nesse processo, ocorre uma ação e novas formas de pensamento e compreensões matemáticas.

Com isso, buscamos dialogar com teóricos que associam a representação utilizada a uma forma de pensar matemática. Nesse sentido, nos identificamos com aspectos destacados por Arcavi (2003), que nos posiciona como sujeitos biológicos e socioculturais e afirma que a visualização é importante tanto como substantivo, caracterizado pelo produto e pela imagem visual, quanto como verbo, que descreve o processo. Para o autor,

[...] visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e avançar na compreensão. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução livre nossa).

Inserindo as experiências situadas do sujeito no conceito de visualização, Nemirovsky e Nobel (1997) incorporam a experiência de vida do sujeito em sua pesquisa, defendendo que estas provocam outras experimentações e uma visão nova e significativa sobre o mesmo assunto. As obras de Arcavi (2003) e Nemirovsky e Nobel (1997) apresentam elementos socioculturais e de valorização de experiência que vão ao encontro dos aspectos que defendemos no conceito de visualização, mas ainda localizam a visualização como algo que ocorre na mente.

Vale destacar que a grande maioria dos estudos que relacionam aprendizagens matemáticas com visualização abordam a geometria como ponto principal e nosso estudo tem como objeto os números naturais e racionais. Com isso, buscamos nesse capítulo agregar a habilidade de visualização a outras visões que nos apoiassem na análise de como o sujeito pensa sobre o que lhe foi apresentado.

Para esse diálogo, inserimos algumas outras visões. Uma delas é a de que mente e corpo são indissociáveis, defendida na Teoria da Cognição Corporificada por Lakoff e Johnson (1981). Nessa concepção, o conhecimento se dá na interação do sujeito com o que ele visualiza, com isso, a visualização não é uma etapa, mas parte constituinte do conhecimento produzido, ou seja, o conhecimento não é uma parte da experiência, mas ele se dá na experiência.

Outra teoria que consideramos importante para compreender o processo de visualização na produção de conhecimento é apresentada por Lins (1999; 2012), no Modelo dos Campos Semânticos. Para o autor, a produção de conhecimento se dá pela enunciação, da maneira que o sujeito, “do conhecimento, e não do conhecer” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 85), se apropria

daquilo que está sendo falado. De acordo com o autor, o sujeito enuncia algo com o que lhe foi proposto, e, de acordo com suas crenças, apresenta uma justificativa. Ao colocar suas crenças de maneira coerente, produz significado e produz conhecimento (LINS, 2012).

As teorias que contribuem para o que defendemos como sendo visualização consideram a linguagem como um elemento importante na produção de significados. A linguagem matemática é impregnada de uma simbologia que a torna, na maioria das vezes, inelegível para muitos estudantes em diferentes etapas da escolarização e, por isso, costuma-se atribuir a qualidade de abstrata para os estudos nessa área. Na escola, as práticas pedagógicas das aulas de matemática pautam-se, em grande parte, em apresentar os conteúdos matemáticos através de definições, exemplos e aplicações diretas. Esta opção deixa de fora a possibilidade de ampliar a perspectiva do conhecimento matemático, com ênfase na produção de significados matemáticos pelos estudantes.

Uma discussão importante para compreender o que entendemos como visualização é admitir uma relação estreita entre linguagem e pensamento. Só é possível saber o que o outro pensa se ele se expressa por meio da linguagem. Em um contexto de ensino e aprendizagem, é pelo diálogo, gestos, produção textual ou pictórica que o professor tem acesso ao pensamento do estudante. Segundo Kristeva (1969) apud Castro e Frant (2011):

Um dos aspectos diferenciadores das concepções de linguagem, talvez o mais importante deles para a Educação, refere-se à relação entre linguagem e pensamento. O pensamento aparece nas abordagens como algo que a linguagem representa, ou espelha, ou codifica para comunicar ou como algo que a linguagem produz, entre outras concepções possíveis, noções que são dependentes da abordagem que as origina (KRISTEVA, 1969 *apud* CASTRO; FRANT, 2011, p. 32).

A relação entre linguagem e pensamento, dentro da perspectiva defendida por Castro e Frant (2011), não é ordenada; o pensamento não antecede a linguagem, nem o contrário. Ambos se constituem em diálogo constante, as formas de pensar se modificam na medida que a linguagem é produzida e o mesmo ocorre com a linguagem, que ganha novos contornos à medida que o pensamento se constitui. Na visão das autoras:

Em nossa visão, a linguagem comporta esses dois vieses em sua dinâmica, a produção e a comunicação do pensamento não podem existir uma sem a outra, a produção do pensamento e a sua comunicação se retroalimentam. Dizer que a linguagem tem uma função social de comunicação não exclui outros aspectos da linguagem, como influenciar, manipular, decidir, manifestar o belo, elogiar etc (CASTRO; FRANT, 2011, p. 33).

No contexto escolar, para que a relação ensino e aprendizagem constitua um processo de produção de significados matemáticos, é preciso que professores e estudantes consigam estabelecer um diálogo entre ideias. Quando muitos atribuem à Matemática a qualidade de abstrata e sem significado, geralmente referem-se à língua matemática constituída por códigos e

símbolos. Os textos matemáticos se tornam, na maioria das vezes, inelegíveis para os estudantes, assim como as formas de pensar dos estudantes sobre esses textos também fogem à compreensão dos professores.

Existe uma expectativa por parte dos professores de que o estudante que produz conhecimento é aquele capaz de reproduzir, em um texto matemático, utilizando os códigos e símbolos da língua matemática, as respostas esperadas. A língua matemática é necessária e é fruto de um conhecimento científico produzido historicamente, mas restringir a produção de conhecimento a esse aspecto é inadequado para um movimento importante no processo de ensinar e aprender matemática. Portanto, a linguagem matemática precisa ser compreendida para além da língua matemática, pois possui a função de comunicar ideias. Assim como as demais linguagens, a linguagem matemática suporta muitos implícitos, “os implícitos não são, para ele, uma exceção na linguagem, mas a regra” (DUCROT, 1991, *apud* CASTRO; FRANT, 2011, p. 34). Para as autoras, o implícito diz respeito à intencionalidade da linguagem, pois “queremos que nosso interlocutor nos compreenda, mas também que nos ache inteligentes” (idem). Porém, se considerarmos o contexto desta pesquisa, vamos buscar, nas respostas dos estudantes, os “não ditos”, o que, em uma aula de matemática, poderiam ser consideradas respostas incompletas ou erradas. Em nossa análise, o objetivo será o de esquadrihar as respostas dos estudantes, estabelecendo relações dos implícitos.

Nessa perspectiva, consideramos, neste capítulo, que um esquema não é restrito a uma imagem, mas é uma representação visual, aliado a questionamentos que buscam compreender um processo de pensamento. Na interação com o esquema, o sujeito produz conhecimento. O uso de esquemas no processo de visualização contribui para a produção de conhecimento matemático, mas não como facilitador da aprendizagem. Consideramos a visualização como um processo contínuo em que podemos agregar novas provocações para articular conhecimentos matemáticos. Os esquemas e as perguntas relacionadas a eles são um elemento importante na proposta, pois quando os licenciandos relacionam os esquemas com as perguntas, e produzem suas respostas, eles estão constituindo seu processo de visualização, que é individual e baseado em suas experiências. Um esquema possui uma intencionalidade pedagógica e pode fazer parte de uma tarefa. Dessa forma, o conceito de visualização que defendemos é um processo que se constitui no diálogo entre “ver” o esquema, pensar sobre as perguntas propostas e apresentar uma resposta. Pensamento e linguagem se relacionam no processo de produção de significados matemáticos.

As autoras Castro e Frant (2011, p. 35) defendem questões importantes em relação ao diálogo, o papel da linguagem na construção dos objetos.

Quem fala para alguém ao mesmo tempo fala para si mesmo. Para Kristeva (1969), a linguagem tem a propriedade de organizar o pensamento. É no diálogo com o outro que constituímos objetos e os relacionamos a outros, numa contínua reorganização do conhecimento que temos do mundo. Enunciações pronunciadas no interior dos grupos são engendradas por uma constante negociação de significados entre os sujeitos, que acabam por compartilhar uma compreensão acerca do que é dito, quando conferem

aos objetos e fatos um sentido. Consideramos, portanto, a fala como um material privilegiado para compreensão dos processos de produção de sentido. A análise da fala, no entanto, vai permitir diferentes recortes, dependendo daquilo que dela se quer extrair. (CASTRO; FRANT, 2011, p. 35).

Em relação aos Anos Iniciais e à formação de professores que atuam nesta etapa da escolaridade, o ensino e a aprendizagem dos números permeiam fortemente a prática docente. Nossa perspectiva como formadores de professores é estabelecer estratégias que possibilitem a compreensão da linguagem matemática. Desta forma, quando propomos que os licenciandos operem de forma não usual, com destaque para o uso da reta numérica, oferecemos a estes oportunidade de ampliar suas possibilidades pedagógicas. Portanto, desejamos que os licenciandos aprendam a pensar com o uso de *esquemas*, mas, que, além disso, com essa experiência, compreendam a importância do processo e o utilizem como metodologia, futuramente, em suas práticas.

2.1 O processo visualização da adição e da subtração na formação de professores que ensinam matemática

No trabalho com a licenciatura em pedagogia, um questionamento que surge e norteia os trabalhos com os licenciandos é o de como podemos abordar as operações com números naturais e racionais para que a formação proporcione um repertório amplo para o trabalho destes futuros professores.

O conceito de adição de números naturais se aproxima, de forma imbricada, dos primeiros conhecimentos de contagem. Por isso, de forma geral, os estudantes apresentam pouca dificuldade em realizar esta operação em contextos cotidianos e escolares. Quando a operação de adição é tratada na escola com algoritmos impostos, em particular, nas “contas” com reserva, a dificuldade torna-se evidente, pois, “o conceito de adição no conjunto dos números naturais $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ está intimamente ligado com a construção do conceito de número e com o conceito de sistema de numeração decimal.” (BARBOSA *et al.*, 2009, p. 30).

No caso da subtração de números naturais, essas supostas facilidade e naturalidade não se aplicam, mas o conceito de retirar também pode estar associado à contagem decrescente, menos usual, mas uma estratégia que se aproxima da proposta da contagem crescente da adição.

Os processos e ações relacionados às operações de adição e subtração são o foco deste estudo. Dessa forma, adicionar pode estar associado ao “juntar tudo”, a “contagem desde o zero”, a “acrescentar para transformar”, a “contagem desde o valor inicial dado”. Assim como subtrair pode estar associado a “contar para trás”, a “retirar do todo”, a “retirar por comparação”. Os estudantes utilizam estes diferentes aspectos que podem ser invisíveis para os professores, pois, muitas vezes, se preocupam com o resultado das operações. Conhecer esses aspectos subliminares dos processos e ações desenvolvidas pelos estudantes pode contribuir para que a

proposição de tarefas pelos professores ocorra de forma mais qualificada e diversificada.

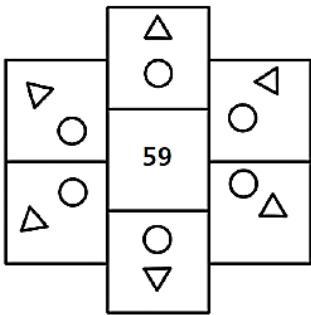
A proposta pedagógica envolvendo as operações, apresentada no material didático da disciplina, exploram a visualização por *esquemas*, tabelas com ênfase nas regularidades e a utilização de materiais manipuláveis. O tradicional arme e efetue é substituído por propostas que provoquem a reflexão das operações, por exemplo, nas diferentes possibilidades de soma 59 e 177, exemplificada na Figura 17, ou nas possibilidade de soma 10 com as Régua de Cuisenaire, na Figura 18, que explora as possibilidades das parcelas 1, 3 e 7, mas que na continuidade explora outras adições cuja soma é 10. O uso das Régua de Cuisenaire nos permite explorar um contexto contínuo, menos usual que os contextos discretos, contagem de objetos, frutas ou pessoas.

Figura 17 – Diferentes possibilidades da soma 59 e 177.

Na figura a seguir temos sete quadrados e em seis deles temos um triângulo e um círculo dentro. Resolva o problema proposto fazendo uma investigação e registrando as etapas da solução.

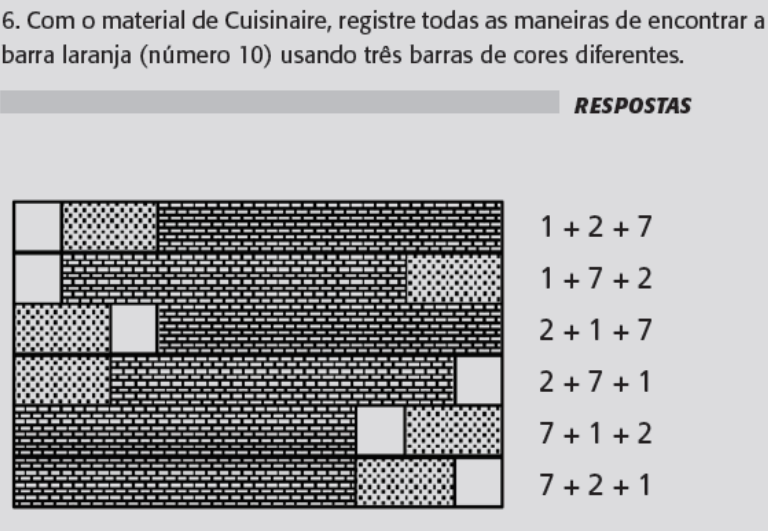
Complete todos os círculos e triângulos com os seguintes números 14, 17, 21, 22, 24, 28, 31, 35, 37, 38, 42, 45, sem repeti-los, de forma que:

- Os números em cada quadrado somem 59;
- Os números que estão nos círculos somem 177.



Fonte: BARBOSA et al, 2009, p.67

Figura 18 – Diferentes possibilidades da soma 10.



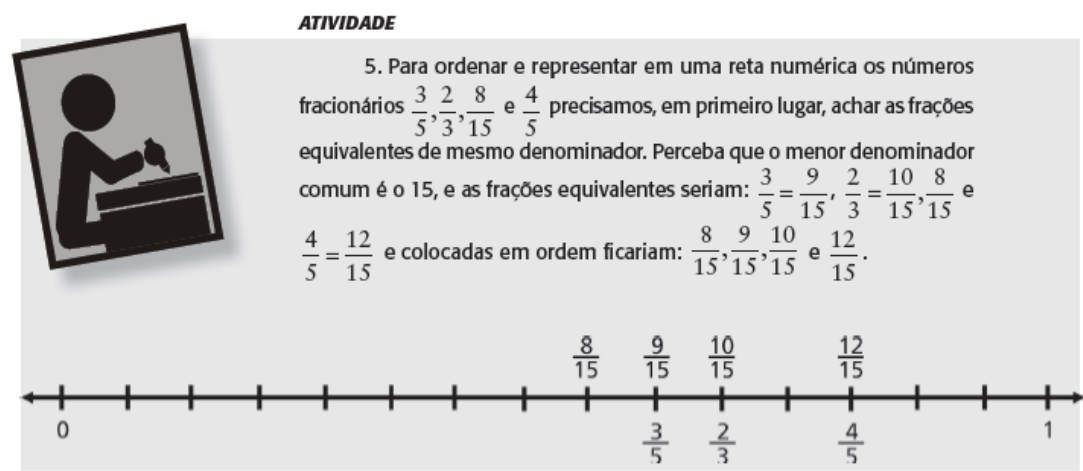
Fonte: BARBOSA et al, 2009, p.60.

Baseada em propostas investigativas e exploratórias, podemos inserir a exploração da reta numérica. Na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), a habilidade EF03MA04

propõe que os números naturais sejam relacionados a pontos na reta numérica para explorar a ordenação, a comparação e as operações, em particular a adição e a subtração, que podem ser relacionadas aos deslocamentos horizontais.

Com relação aos números racionais, a BNCC (BRASIL, 2018), nas habilidades EF04MA09 e EF05MA05, destaca o uso da reta numérica para representar frações unitárias e os demais números racionais positivos, como na exploração destacada na Figura 19 do material didático da disciplina de Matemática na Educação 2.

Figura 19 – Representação e ordenação de frações.



Fonte: SILVA *et al.*, 2010, p. 93.

Em nossa visão, a adição e a subtração de números racionais também podem ser exploradas utilizando deslocamentos horizontais, saltos para a direita e para esquerda, com os devidos cuidados inerentes a esses campos numéricos.

O processo de visualização, com o uso de esquemas, no campo aditivo permite ao licenciando realizar reflexões sobre as estratégias utilizadas e, ao mesmo tempo, oferece a este a oportunidade de estabelecer diversas relações e construir estratégias, ou seja, na interação com os esquemas, o conhecimento matemático do licenciando é produzido.

No próximo tópico descreveremos o questionário e os *esquemas* utilizados na análise.

3. Desenvolvimento da Pesquisa

Para investigar como os licenciandos utilizam a visualização na solução de tarefas propostas que exploram o uso de esquemas, realizamos uma pesquisa de campo com licenciandos em pedagogia que cursam as disciplinas Matemática na Educação 1 e 2, no segundo semestre letivo de 2020, utilizando a ferramenta Formulário Google. As situações foram propostas como Avaliação Complementar e não existia obrigatoriedade de sua realização. Um total de 147 estudantes realizaram a atividade, sendo 73 de Matemática na Educação 1 e 74 de Matemática na Educação 2.

As Avaliações Complementares de Matemática na Educação 1 e 2 exploram tarefas com as operações e relações com números naturais e racionais na forma de fração, respectivamente, estabelecendo uma correspondência entre os objetivos das tarefas, porém com contextos numéricos distintos. Cada tarefa, composta de subitens, foi visualizada de uma vez e formaram um bloco, cada um com intencionalidades pedagógicas.

A Avaliação Complementar foi organizada com 7 tarefas no total, sendo que as tarefas 1 e 7 tiveram por objetivo compreender as crenças dos licenciandos sobre visualização, antes e depois da experiência em resolver as demais, que envolveram conhecimento matemático. A Avaliação Complementar (Quadro 2) foi organizada da seguinte forma:

Quadro 2 – Organização da Avaliação Complementar.

Tarefa 1	<i>Ideias iniciais sobre visualização.</i> ● identificar o que o licenciando compreende; ● saber se o licenciando utiliza os esquemas na resolução de problemas; ● identificar como o licenciando avalia o uso de esquemas no ensino de Matemática dos Anos Iniciais.
Tarefa 2	<i>Adição na reta</i> ● identificar a ideia expressa na reta; ● criar um problema associado à representação; ● elaborar uma outra representação (esquema ou desenho) que esteja relacionada ao problema; ● associar uma outra representação ao problema proposto.
Tarefa 3	<i>Representação da Adição e Subtração na reta numérica</i> ● representar na reta a subtração; ● elaborar uma outra representação para a subtração, diferente da reta numérica.
Tarefa 4	<i>Áreas de retângulos/ Frações usando retângulos</i> ● identificar a ideia matemática na representação; ● representar com números, operações e igualdade.
Tarefa 5	<i>Copos, garrafas e baldes</i> ● identificar relações entre capacidades; ● justificar as relações estabelecidas; ● criar uma nova relação de capacidade.
Tarefa 6	<i>Sequências de círculos</i> ● mostrar como encontrar as próximas figuras; ● justificar as respostas apresentadas.
Tarefa 7	Compreensão sobre visualização (após a realização das tarefas) ● identificar como o licenciando avalia o uso de esquemas no ensino dos Anos Iniciais; ● saber o que o licenciando entende sobre o uso da visualização nas tarefas propostas; ● realizar uma autoavaliação sobre a realização das tarefas.

Fonte: Autoras.

Vale ressaltar que o questionário foi extenso e que as Tarefas 1, 2, 3 e 7 foram aquelas que mais se aproximaram da discussão sobre a visualização e o uso de esquemas para que o licenciando realizasse uma ação na busca da solução. Por isso, estas questões que tratam desses aspectos serão objetos da análise.

Nas Figuras 20 e 21 as Tarefas 1 e 7 da proposta feita aos licenciandos.

Figura 20 – Tarefa Inicial do Questionário.

1) Perguntas Iniciais

1.1) Escreva sobre o que você entende por visualização em matemática. *

1.2) Você costuma recorrer a representações através de esquemas, tabelas, desenhos para resolver problemas envolvendo números naturais e operações? Comente um pouco sobre isso. *

1.3) Escreva sobre o que você pensa sobre o uso de esquemas, tabelas e desenhos para o ensino de matemática dos estudantes dos Anos Iniciais. *

Fonte: As autoras

Figura 21 – Tarefa Final do Questionário.

7) Perguntas Finais

7.1) Após as atividades desenvolvidas, o que você pensa sobre o uso de esquemas, tabelas e desenhos para o ensino de matemática dos estudantes dos Anos Iniciais? Seu ponto de vista modificou? Comente sobre isso. *

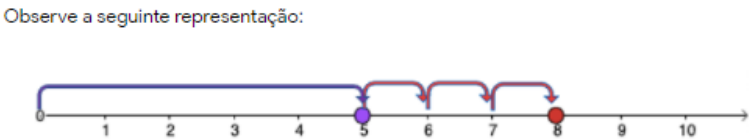
7.2) Como você avalia o uso da visualização nas atividades realizadas? Comente sobre isso. *

7.3) Comente sobre seu desempenho no desenvolvimento dessas atividades. Caso deseje, faça também outros comentários que não foram contemplados nas perguntas anteriores. *

Fonte: As autoras.

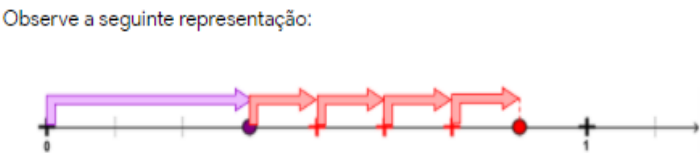
Na Tarefa 2, inicialmente, apresentamos duas representações, uma delas referente aos números naturais, Figura 22, e a outra aos números racionais, Figura 23.

Figura 22 – Representação na reta numérica da Tarefa 2 de Matemática Educação 1.



Fonte: As autoras

Figura 23 – Representação na reta numérica da Tarefa 2 de Matemática Educação 2.

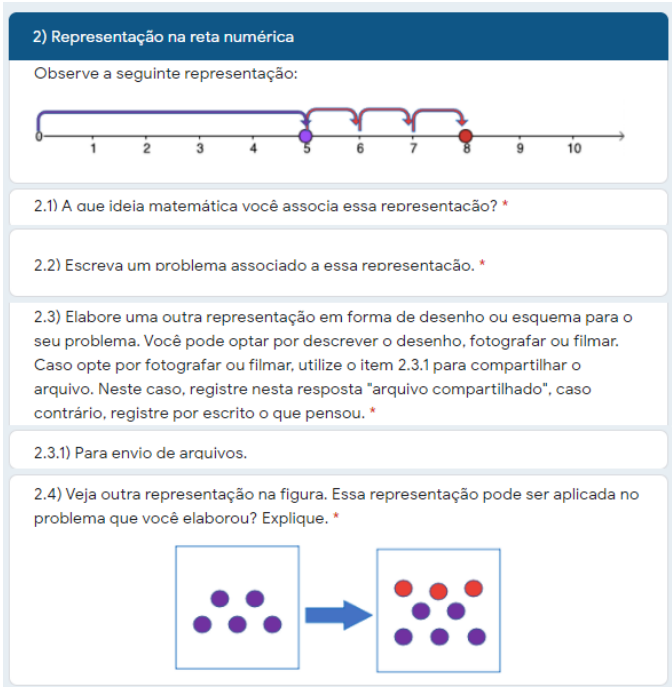


Fonte: As autoras

As retas são graduadas de formas distintas. No primeiro caso apresentamos 10 unidades, enquanto no segundo caso, a unidade está dividida em 8 partes.

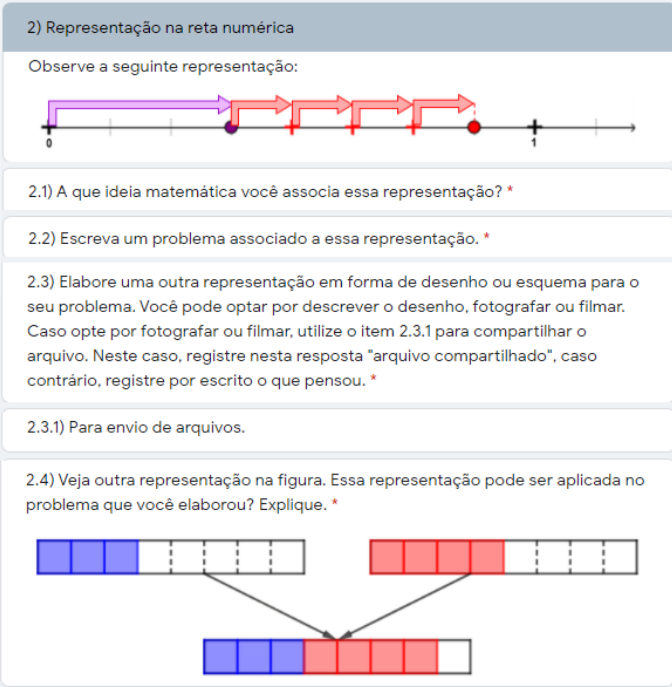
Na Tarefa 2, Figuras 24 e 25, solicitamos que os licenciandos identificassem que ideia matemática (subitem 2.1) está presente no esquema da reta numérica apresentada. Nos itens subsequentes, continuamos a suscitar essa discussão, sem indicar de forma explícita a ideia de adição. Propusemos a criação de um problema associado à representação (subitem 2.2) e solicitamos (subitem 2.3) que elaborassem uma outra representação para o problema criado. Apresentamos outra representação (subitem 2.4), que, em nossa perspectiva, estava associada à representação na reta numérica, porém, perguntamos se essa nova representação estava associada ao problema elaborado pelo licenciando, já que o subitem 2.1 possibilita respostas diferentes das usuais. Os subitens 2.4 das duas avaliações se diferem, pois estão em consonância com o contexto numérico.

Figura 24 – Tarefa 2 de Matemática Educação 1



Fonte: As autoras

Figura 25 – Tarefa 2 de Matemática Educação 2



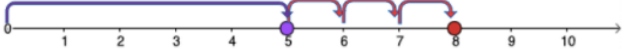
Fonte: As autoras

Na Tarefa 3, utilizamos a mesma imagem da reta numérica da Tarefa 2, mas afirmamos que representa uma adição e, no item 3.1, propusemos que construíssem a representação da subtração na reta numérica. Em seguida pedimos que o licenciando representasse a subtração de uma forma diferente da reta numérica (Figuras 26 e 27).

Figura 26 – Tarefa 3 de Matemática Educação 1

3) Representação da adição e subtração na reta numérica

Observe novamente a representação. Ela está associada a adição $5 + 3 = 8$.



3.1) Usando a reta numérica, elabore uma representação para a subtração $8 - 3 = 5$. Você pode optar por descrever o desenho, fotografar ou filmar. Caso opte por fotografar ou filmar, utilize o item 3.1.1 para compartilhar o arquivo. Neste caso, registre nesta resposta "arquivo compartilhado", caso contrário, registre por escrito o que pensou. *

3.1.1) Para envio de arquivos.

3.2) Elabore uma outra representação em forma de desenho para a mesma subtração. Você pode optar por descrever o desenho, fotografar ou filmar. Caso opte por fotografar ou filmar, utilize o item 3.2.1 para compartilhar o arquivo. Neste caso, registre nesta resposta "arquivo compartilhado", caso contrário, registre por escrito o que pensou. *

3.2.1) Para envio de arquivos.

Fonte: As autoras

Figura 27 – Tarefa 3 de Matemática Educação 2.

3) Representação da adição e subtração na reta numérica

Observe novamente a representação. Ela está associada a adição $3/8 + 4/8 = 7/8$.



3.1) Usando a reta numérica, elabore uma representação para a subtração $7/8 - 4/8 = 3/8$. Você pode optar por descrever o desenho, fotografar ou filmar. Caso opte por fotografar ou filmar, utilize o item 3.1.1 para compartilhar o arquivo. Neste caso, registre nesta resposta "arquivo compartilhado", caso contrário, registre por escrito o que pensou. *

3.1.1) Para envio de arquivos.

3.2) Elabore uma outra representação em forma de desenho para a mesma subtração. Você pode optar por descrever o desenho, fotografar ou filmar. Caso opte por fotografar ou filmar, utilize o item 3.2.1 para compartilhar o arquivo. Neste caso, registre nesta resposta "arquivo compartilhado", caso contrário, registre por escrito o que pensou. *

3.2.1) Para envio de arquivos.

Fonte: As autoras

Uma informação importante sobre a proposta foi a possibilidade de que os licenciandos também pudessem enviar suas respostas em formato de arquivo de imagem, pois com esse tipo de produção foi possível avaliar os esquemas elaborados pelos licenciandos. Portanto, para além da compreensão dos esquemas, produzir soluções utilizando outros esquemas possibilita indicar elementos importantes do processo de visualização do licenciando.

A seguir apresentaremos a estrutura das categorias de análise para as soluções que emergiram no processo da produção de significados matemáticos dos licenciandos.

4. Análise

A estrutura de análise foi construída tomando por base as respostas dos licenciandos. As categorias emergiram de uma leitura sensível e detalhada das respostas que foram apresentadas como textos explicativos, números ou desenhos, com o uso da reta numérica ou representação pictórica.

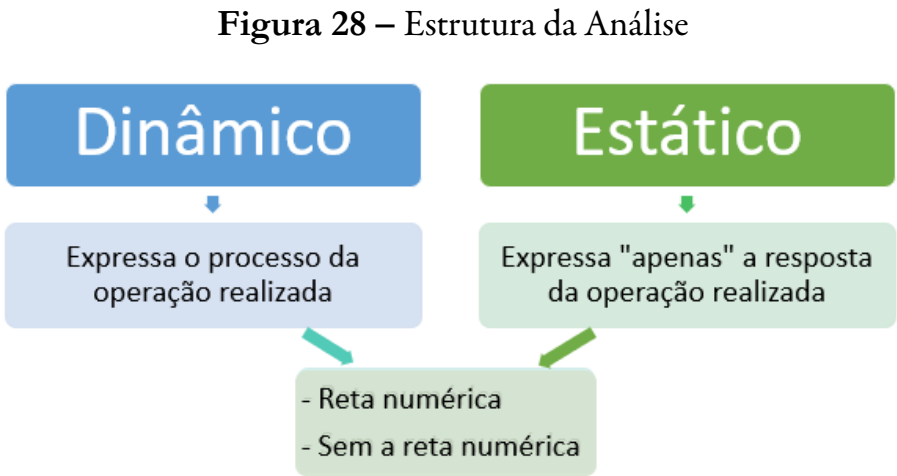
As operações de adição e subtração são conhecidas dos licenciandos e, portanto, eles já possuem modos consolidados de operar. A proposta 2.1 apresenta uma reta numérica, o que é pouco usual para o estudante no contexto das operações e gera, em muitos deles, um processo de “desconforto”. Ao mesmo tempo, a característica da proposição de não direcionar para uma única interpretação, possibilitou a produção de diferentes respostas e representações que suscitaram a criação das seguintes categorias macros: (1) Dinâmico; (2) Estático.

Considera-se como: (1) Dinâmico – quando existem elementos na resposta apresentada pelo licenciando que indicam uma ação para explicar o processo; (2) Estático – quando o licenciando apresenta um registro que indica apenas a resposta final.

As categorias Dinâmico e Estático ganham importância nesse trabalho, pois estamos lidando com futuros professores. Perceber como os licenciandos dialogam e registram os processos de visualização e quais objetos matemáticos emergem dessa proposta de tarefas indica questões importantes na produção de significados durante a formação de professores. Com isso, entendemos que estamos contribuindo no desenvolvimento da habilidade do futuro professor em dialogar e compreender a natureza na produção de significados dos seus estudantes na realização de tarefas matemáticas. Além disso, esse processo mostra ao licenciando uma possibilidade de perceber a importância de propor tarefas abertas, em que os registros dos estudantes ganham destaque no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Como subcategorias, criamos aquelas que podem ou não envolver o uso da reta numérica em suas respostas. Identificamos que, para além do objetivo inicial, que foi o de usar a reta numérica para operar, foi possível identificar diferentes objetos matemáticos que circundam o uso da reta como: distância, localização, deslocamento, ordenação e proporcionalidade.

Na Figura 28 apresentamos a estrutura da análise descrita.



Fonte: As autoras

Considerando a estrutura de análise, reunimos as respostas dos estudantes indicando as categorias de análise do processo de visualização de acordo com as Tarefas 2 ou 3 e seus respectivos campos numéricos.

Apresentaremos as respostas dos licenciandos e uma possível interpretação sobre essas respostas, dialogando com os aspectos do conhecimento matemático e identificando o processo de visualização. Em muitos casos as respostas têm aspectos comuns, pois cada uma delas expressa características que as diferenciam ou que as aproximam.

4.1 Análise da Tarefa 2

Este grupo de respostas indica um processo de solução das operações de adição que foi explorado na Tarefa 2. Registros com a reta numérica foram utilizados em menor frequência, pois a forma como foi construída a proposta não suscitou esta representação.

Figura 29 – Reta numérica 1 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico.

“A uma reta numérica de números reais. Onde existe uma soma. Cada bola equivale a uma unidade ou 1 número real; neste caso começa com um conjunto de 5 números reais ou 5 bolas roxas e vão acrescentando 1 bola vermelha por vez ou 1 número real até completar 3 bolas vermelhas. Ficando um conjunto de 5 roxas e 3 vermelhas ou 8 centímetros.”

Fonte: As autoras

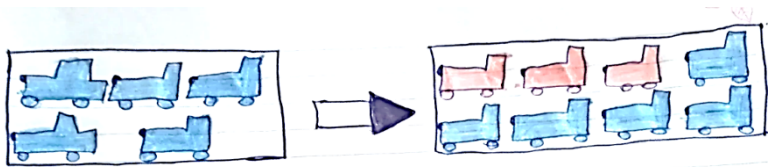
Figura 30 – Reta numérica 2 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico.

“Conforme representado na reta numérica, podemos botar a ideia se soma na representação; uma vez que a cada intervalo soma-se 1 unidade ao resultado.”

Fonte: As autoras

As Figuras 29 e 30 expressam respostas discursivas e apoiam a explicação na reta numérica. A Figura 29 apresenta uma relação direta com o processo de visualização, pois a descrição utiliza elementos do desenho apresentado, quando no texto fala de bolas roxas e vermelhas, em que as bolas representam os pontos na reta. Também associa quantidade, quando se refere ao número de pontos. Identifica os números naturais como reais, mostra uma confusão entre contínuo e discreto, “conjunto de 5 números”, e associa o intervalo entre dois números com 1 centímetro. Na Figura 30, o licenciando expressa a presença de “saltos” quando indica que “a cada intervalo soma 1”. As duas respostas apresentam elementos da categoria Dinâmico, pois nos textos fica explícita a ação da operação: “vão acrescentando” e “a cada intervalo soma-se”.

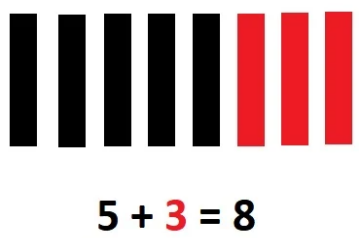
Figura 31 – Pictórica 1 – “5 + 3 = 8” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

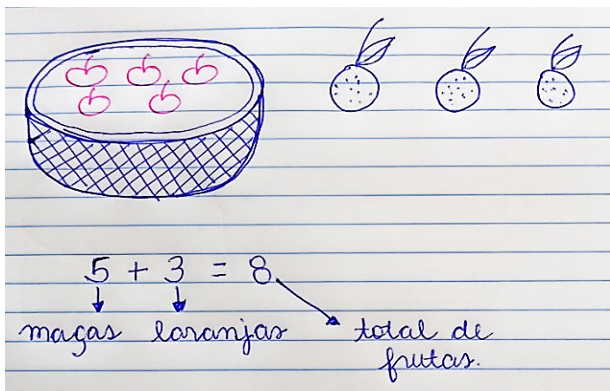
Na Figura 31 temos a expressão de uma adição usando carrinhos de cores diferentes. No desenho elaborado, vemos o estado inicial – de 5 carrinhos representados em azul – e uma ação de transformação para o estado final – de 8 carrinhos, dos quais 3 foram representados em vermelho, sinalizando o acréscimo. Esta solução reproduz a figura apresentada no subitem 2.4 da Avaliação Complementar de Matemática na Educação 1.

Figura 32 – Pictórica 2 – “5 + 3 = 8” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

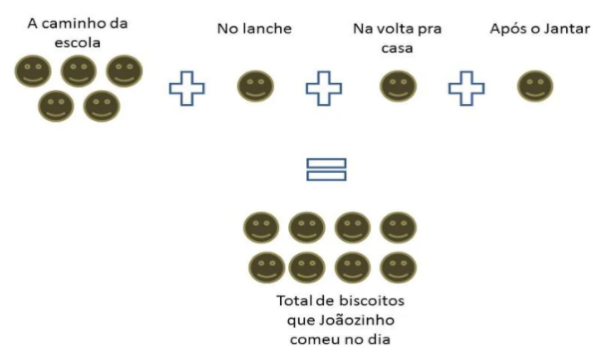
Figura 33 – Pictórica 3 – “5 + 3 = 8” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

Os registros das Figuras 32 e 33 se aproximam da solução da Figura 15. Na Figura 32, pelo uso de cores para representar quantidades: a parcela 5 representada por barras pretas, a parcela 3 representada por barras vermelhas. A ideia de acréscimo foi reforçada nos desenhos, mas a ideia de transformação ficou mais implícita, pois o estado inicial não foi representado separadamente, apenas o estado final. Essa ideia é também muito próxima às maçãs utilizadas na Figura 33, na qual o estado final não foi representado no desenho, mas enfatizado na indicação da operação e no registro do total de frutas.

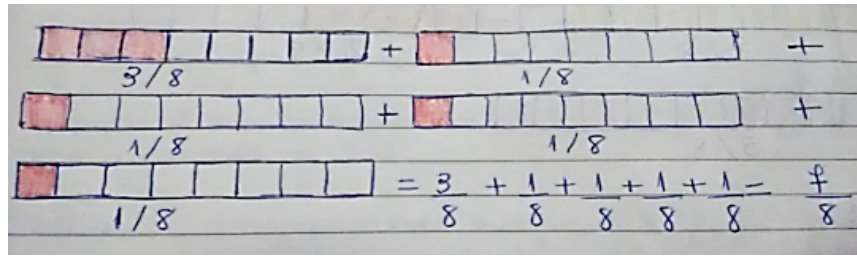
Figura 34 – Pictórica 4 – “5 + 3 = 8” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

Na Figura 34, a resposta se caracteriza como um processo dinâmico, pois faz o acréscimo de um biscoito a cada vez e mostra esse acréscimo em uma linha do tempo indicada por “a caminho da escola”, “no lanche”, “na volta pra casa” e “após o jantar”. Ao final, indica o total de biscoitos que Joãozinho comeu no dia. A linha do tempo contextualiza uma situação-problema da qual podemos interpretar que o licenciando se apropriou da proposta.

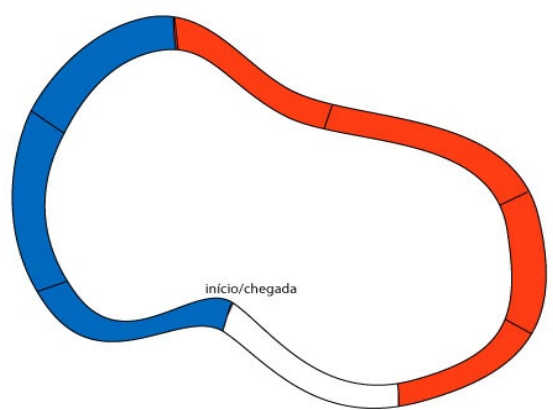
Figura 35 – Pictórica 5 – “3/8 + 4/8 = 7/8 ” – Estático.



Fonte: As autoras

A Figura 35 representa a fração 3/8 e quatro vezes a fração 1/8 , a conta armada e o resultado. Em um primeiro olhar, considerando a representação no conjunto dos números racionais, a resposta pode parecer se aproximar da anterior, mas, nesse caso, categorizamos a resposta como Estático, porque não há um movimento de acréscimo no registro, nem uma articulação entre as representações das frações e o resultado.

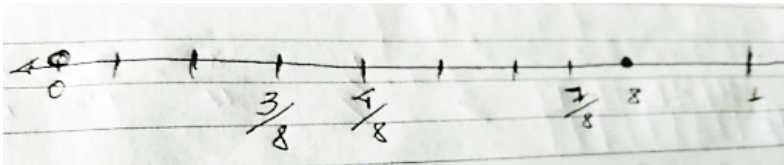
Figura 36 – Pictórica 6 – “3/8 + 4/8 = 7/8 ” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

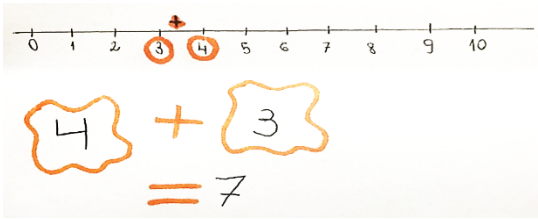
Na Figura 36, o licenciando utiliza uma pista de corrida para indicar o inteiro, que foi dividido em 8 partes, o que sugere que ele interpretou o inteiro como $\frac{8}{8}$. Porém, a divisão não foi feita em partes iguais, pois as regiões possuem formas diferentes. Considerando a divisão em partes iguais, a vermelha pode significar $\frac{4}{8}$ e a cor azul $\frac{3}{8}$, embora não haja registro numérico. A metáfora da pista indica um processo Dinâmico.

Figura 37 – Reta numérica 6 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

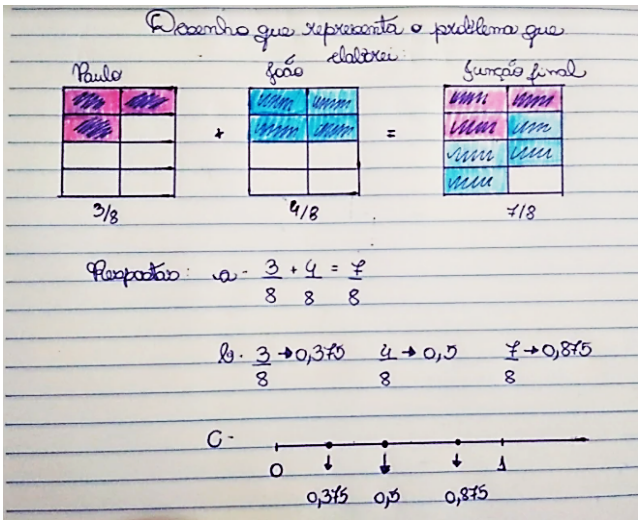
Figura 38 – Reta numérica 7 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

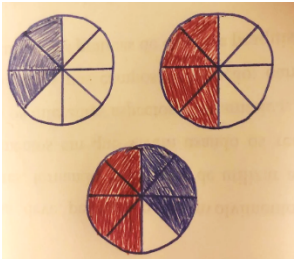
As Figuras 37 e 38 apresentam respostas utilizando a reta numérica sem a indicação de uma ação para realizar a operação. A Figura 37 apenas apresenta os números envolvidos na operação, porém não expressa uma correspondência entre $\frac{8}{8}$ e 1 inteiro. Na Figura 38, na adição entre 4 e 3, os valores são indicados como localização e o resultado 7 não é sinalizado na reta. Nos dois casos as operações parecem ter sido realizadas de forma usual e a reta utilizada para ilustrar, o que caracteriza a categoria Estático.

Figura 39 – Pictórica 10 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

Figura 40 – Pictórica 11 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

As Figuras 39 e 40 indicam respostas usuais da adição, uma considerando o retângulo e o círculo como inteiro. São utilizadas cores diferentes para representar os numeradores de cada fração. Na Figura 39, o licenciando ainda registra a resposta em forma de adição, representação decimal e localização na reta numérica. As duas respostas foram classificadas na categoria Estático porque os únicos elementos visuais de compreensão são as cores diferentes, mas não há uma ação explícita para operar.

Na Tarefa 2, propusemos inicialmente um esquema utilizando a reta numérica, cuja intencionalidade foi explorar a operação de adição, porém a tarefa possuía uma característica aberta. Buscamos compreender os significados produzidos pelos licenciandos a partir do esquema proposto. A análise dos registros apresentados nas Figuras 29 a 40 expressam a riqueza de respostas que os estudantes produziram, e este é apenas um recorte. Muitas respostas, denominadas como Estático, mostram uma naturalização de como resolver ou criar situações para adição, mas não indicam a necessidade de demonstrar o processo realizado, mas isso não significa que o licenciando não possua esse conhecimento. Por outro lado, aqueles que apresentaram respostas que indicam a realização de um processo para operar, explicitam que se apropriaram da proposta com uso de esquemas. Embora algumas respostas indiquem muitos implícitos, como na Figura 36, da pista de corrida, existe por parte dos licenciandos uma apropriação da perspectiva de que realizar uma operação envolve uma ação, um processo.

4.2 Análise da Tarefa 3

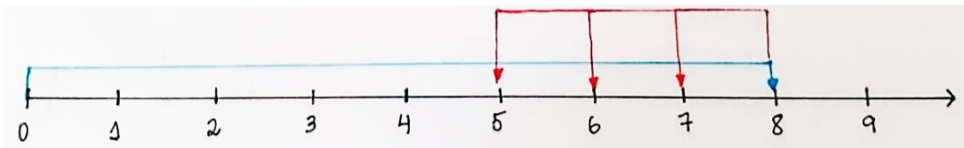
Este grupo de respostas indica o processo de solução da operação de subtração que foi explorado na Tarefa 3. Existem muitos registros diferentes apoiados na reta numérica como resposta desta tarefa, mesmo quando a produção é textual.

Figura 41 – Reta numérica 8 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico.

“Pensei em posicionar a primeira flecha do oito na reta numérica, partindo sempre do zero até alcançar o número oito. Em seguida, posicionar a segunda flecha de modo que o início seja o final da primeira. O início da segunda flecha, que é no número 8, ele estará ocupando 3 espaços à esquerda e o seu fim está localizado no número 5.”

Fonte: As autoras

Figura 42 – Reta numérica 9 – “8 – 3 = 5” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

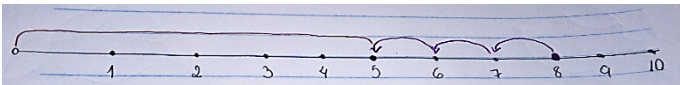
Figura 43 – Reta numérica 10 – “8 – 3 = 5” – Dinâmico.

“Para sabermos o valor da subtração de 8-3, damos um “passo” grande do 0 até o 8 depois vamos voltando as 3 casas de acordo, e aí conseguimos chegar no valor correto.”

Fonte: As autoras

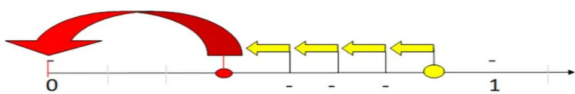
As respostas das Figuras 41, 42 e 43 apresentam o mesmo significado, embora as representações tenham sido estruturadas com narrativas diferentes: texto e esquema na reta. É importante destacar a ação de identificar o número 8 como a distância do 0 ao 8, indicada pela “flecha do oito”, pela seta azul e “passo grande do 0 ao 8”, o que as caracteriza na categoria Dinâmico. Na Figura 42, o sentido da seta vermelha indica que a operação é de subtração e ir do 8 para o 7, do 7 para o 6 e do 6 para o 5, mostra que a reta foi utilizada para realizar o processo.

Figura 44 – Reta numérica 11 – “8 – 3 = 5” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

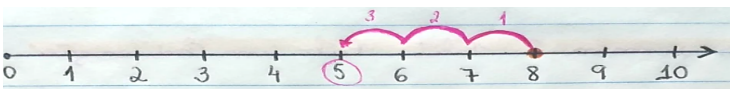
Figura 45 – Reta numérica 12 – “7/8 – 4/8 = 3/8” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

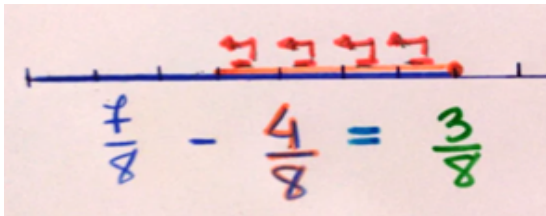
No registro indicado na Figura 44, o licenciando não identifica inicialmente o número 8 como um intervalo do 0 ao 8. Contudo, localiza o 8 na reta e retorna de “um em um”, utilizando a reta para operar. Ao final, marca de rosa o intervalo de 0 a 5, o resultado da subtração. Embora o contexto numérico se altere, o processo de utilizar as setas em direção ao início se mantém na Figura 45, que também indica a diferença, neste caso, com a seta vermelha.

Figura 46 – Reta numérica 13 – “8 – 3 = 5” – Dinâmico.



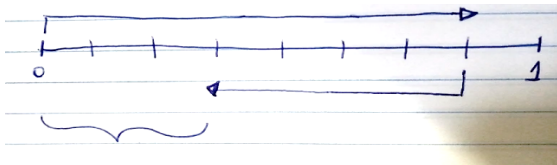
Fonte: As autoras

Figura 47 – Reta numérica 14 – “ $\frac{7}{8} 8 - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

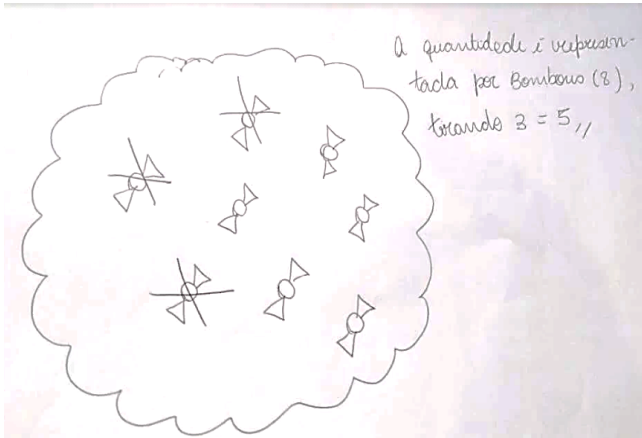
Figura 48 – Reta numérica 15 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

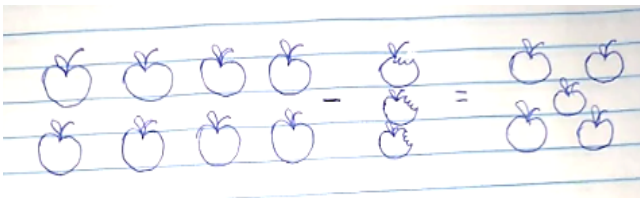
Na Figura 46, o licenciando localiza o 8 na reta, não considera o intervalo de 0 a 8, utiliza a reta para operar, localiza o 5 como resposta, mas também não identifica o intervalo de 0 a 5. O registro da Figura 47, no contexto numérico dos racionais, se assemelha ao anterior e destaca a divisão em 8 partes, embora as frações não estejam escritas. Na resposta expressa na Figura 48, apesar de nenhuma fração ter sido representada, o licenciando registra, por meio de setas, as frações $\frac{7}{8}$ (seta do 0 ao $\frac{7}{8}$) e $\frac{4}{8}$ (seta do $\frac{7}{8}$ ao $\frac{3}{8}$). Faz o processo em bloco e indica com uma chave o resultado $\frac{3}{8}$. Em todos os casos o “ir e vir” ou apenas o “vir” demonstram um processo Dinâmico.

Figura 49 – Pictórica 12 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico.



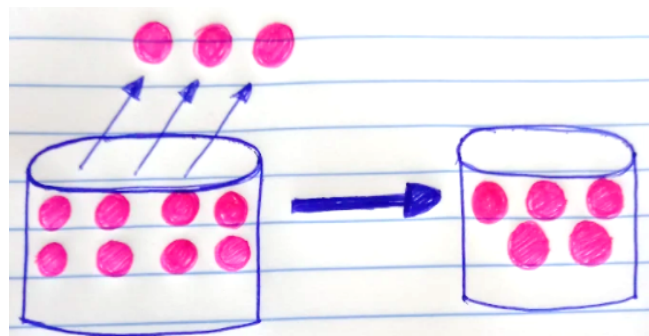
Fonte: As autoras

Figura 50 – Pictórica 13 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico.



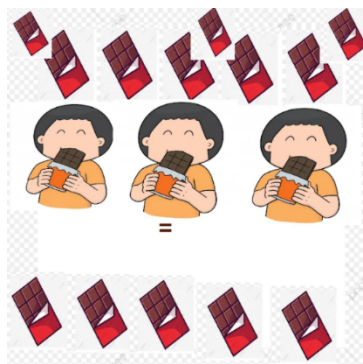
Fonte: As autoras

Figura 51 – Pictórica 14 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

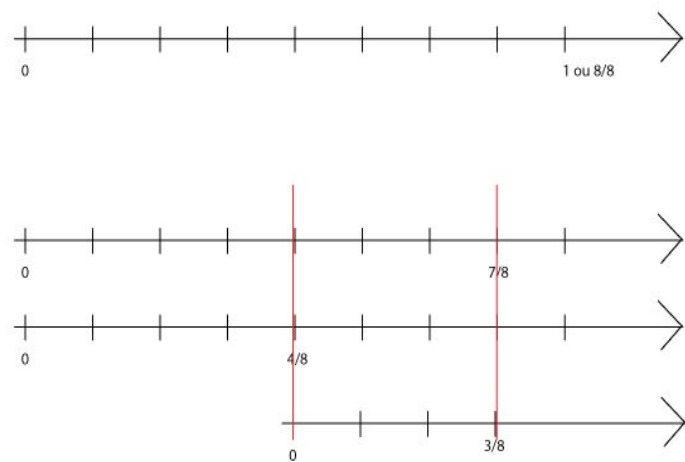
Figura 52 – Pictórica 15 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico.



Fonte: As autoras

As respostas das Figuras 49, 50, 51 e 52 indicam a quantidade inicial: 8 balas, 8 maçãs, 8 bolinhas e 8 chocolates. As balas se apresentam em uma única figura com estado inicial e final. Nas outras, ficam indicados o estado inicial e o final em figuras distintas, com as maçãs e chocolates mordidos, e, no caso das bolinhas, sendo retiradas, figura semelhante ao material didático. As mordidas e retiradas indicam a ação do processo de subtração, o que insere as soluções na categoria Dinâmico.

Figura 53 – Reta numérica 16 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Dinâmico.

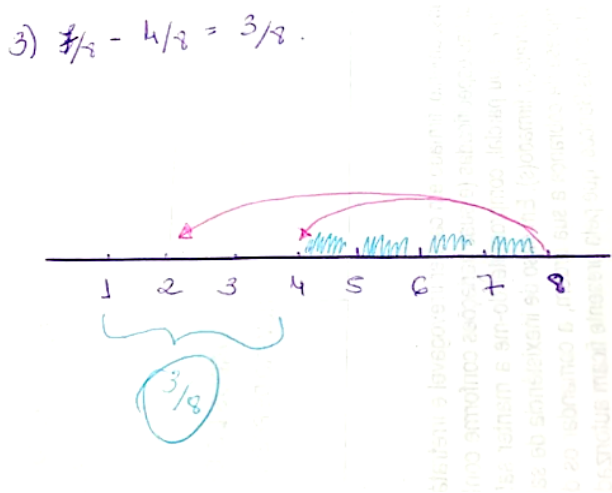


Fonte: As autoras.

A resposta expressa na Figura 53 utiliza a reta para operar de uma forma particular. Inicia identificando a divisão em 8 partes com a correspondência de 1 a $\frac{8}{8}$. Na segunda, a reta registra

o intervalo de 0 a $\frac{7}{8}$. Na terceira, marca o intervalo de 0 a $\frac{4}{8}$ e na última reta, o intervalo de $\frac{4}{8}$ a $\frac{7}{8}$, registrando a resposta $\frac{3}{8}$. Esse intervalo, que é a resposta, da forma representada, indica um deslocamento horizontal do 0 para a direita, para a mesma localização do $\frac{4}{8}$.

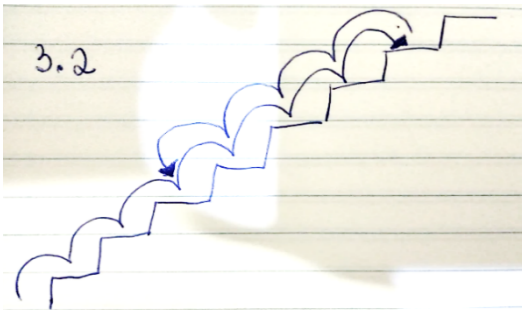
Figura 54 – Reta numérica 18 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico.



Fonte: As autoras

Esta resposta, a Figura 54, apresenta uma questão importante: o licenciando usa a reta para operar, mas, embora os números sejam racionais, ele apenas opera com os numeradores. A representação da reta numérica não começa no zero, o que nos sugeriu interpretar que a reta é utilizada para representar a operação, não para operar.

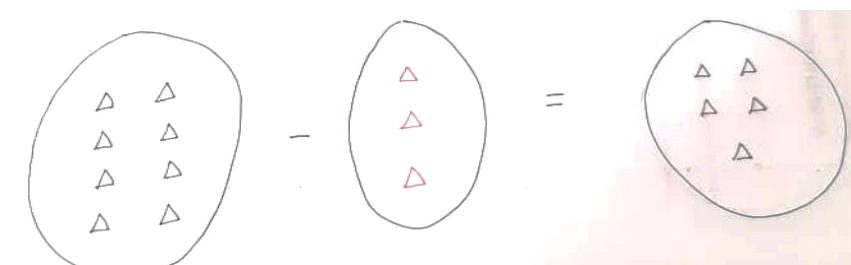
Figura 55 – Reta numérica 20 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico.



Fonte: As autoras

Na Figura 55, o licenciando usa a escada como metáfora para a reta numérica, sem apresentar nenhum número que registre as frações. Representa 8 degraus, que correspondem aos $\frac{8}{8}$. Indica a ação de subir os 7 degraus, correspondente aos $\frac{7}{8}$, e retorna 4 degraus, que equivalem aos $\frac{4}{8}$, restando os $\frac{3}{8}$, correspondentes a 3 degraus.

Figura 56 – Pictórica 21 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático.



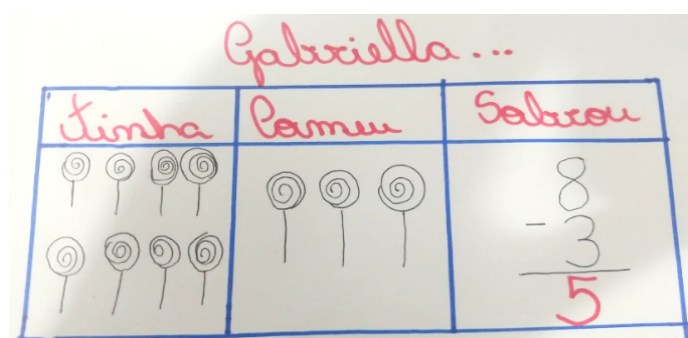
Fonte: As autoras

Figura 57 – Pictórica 22 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático.



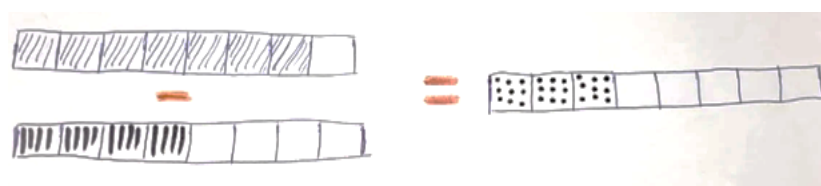
Fonte: As autoras

Figura 58 – Pictórica 23 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

Figura 59 – Pictórica 24 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Estático.

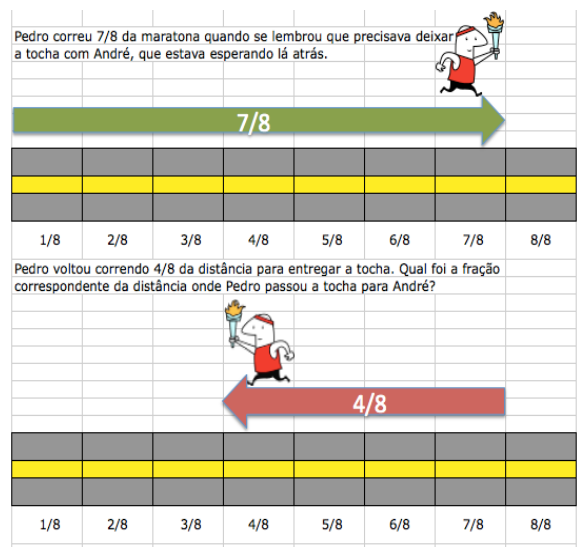


Fonte: As autoras

As respostas das Figuras 56, 57, 58 e 59 representam a subtração da forma usual, as quais reproduzem a conta armada e não expressam um processo, uma ação. Além disso, as respostas indicam igualdade ou equivalência. Nossa compreensão é de que todas são explicativas, têm uma função pedagógica, contribuem em determinada dimensão para a compreensão da operação. A classificação como soluções na categoria Estático não significa que os licenciandos não pensem sobre um processo ou uma ação, mas nossa análise é sobre os registros que produziram para expressar as operações.

Na Figura 58, a representação se assemelha a um esquema usualmente trabalhado nos Anos Iniciais como representação de um problema proposto, relacionando as parcelas aos verbos.

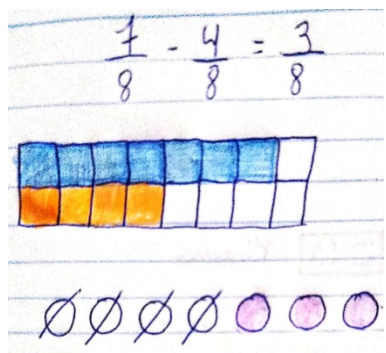
Figura 60 – Reta numérica 19 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico.



Fonte: As autoras

A resposta expressa na Figura 60 apresenta diferentes elementos reunidos em um mesmo desenho: um problema contextualizado, a reta numérica e um personagem. O problema utiliza uma pista de corrida como metáfora para a reta numérica. No texto identificamos um contexto em que o personagem precisa ir e voltar. As frações representam a distância entre dois pontos. Nesse caso apenas a primeira distância ($\frac{1}{8}$) corresponde a fração.

Figura 61 – Pictórica 25 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático.



Fonte: As autoras

Na Figura 61, o estudante apresenta um registro que reúne diferentes formas de compreensão. No retângulo pintado de azul, os $\frac{5}{8}$, e no pintado de laranja os $\frac{3}{8}$. Mas, como a subtração de frações de mesmo denominador pode ser feita subtraindo os numeradores, ele utiliza os círculos para fazer 7 menos 4 e registra a solução, os círculos pintados em rosa, uma quantidade em um conjunto discreto.

A subtração, embora envolva ideias aditivas, não é uma operação tão natural como a adição. Foi possível identificar que as respostas, em sua maioria, foram classificadas na categoria Dinâmico. O direcionamento aumentou a apropriação do processo, com muitos implícitos e não ditos. Houve uma diversificação na representação das respostas: em muitos casos, apenas pictóricas; em outros com uma mescla entre o pictórico e os números; e, ainda, com operações no campo dos naturais, mesmo envolvendo frações, o que foi possível em virtude de utilizarmos

frações homogêneas. Outro aspecto relevante é sobre a reta numérica: alguns utilizaram a reta para operar e outros apenas para representar uma resposta final. De forma geral, nas respostas da categoria Estático, os estudantes localizam os números na reta e reproduzem algoritmos usuais.

Nossa proposição do uso de esquemas para explorar as operações de adição e subtração provocou a produção de respostas que utilizaram uma multiplicidade de outros esquemas próprios do processo de visualização de cada licenciando. Por meio dos esquemas produzidos por eles foi possível fazer uma interpretação sobre seus respectivos processos de visualização.

Conforme afirmam Castro e Frant (2011), identificamos o compartilhamento de significados nas ações apresentadas pelos esquemas produzidos pelos licenciandos que dialogaram com a intencionalidade inicialmente proposta de operar com os números naturais e racionais. Na aula de matemática é preciso estabelecer um diálogo entre estudantes e professores que pressuponha que o pensamento e a linguagem não possuam uma posição hierárquica, portanto, é através da negociação de significados que os objetos matemáticos se constituem.

4.3 Algumas concepções dos licenciandos sobre visualização

Em relação às Tarefas 1 e 7, nossa expectativa era de que os licenciandos poderiam modificar suas crenças em relação ao uso da visualização após a realização das tarefas. Por esse motivo, propusemos as perguntas em dois momentos diferentes, mas, de forma geral, não houve mudança dos aspectos observados por eles. No Quadro 3, apresentamos algumas dessas concepções que foram distribuídas em três categorias.

Quadro 3 – Concepções dos licenciandos sobre visualização.

Categoria 1
Associada à visão de resolução de problemas
“A visualização é uma ferramenta importantíssima que nos permite, através das informações disponíveis, imaginar quais passos dar a fim de solucionar um problema ou desafio.”
Categoria 2
Associada à exemplificação da teoria
“Acredito que seja uma representação gráfica usada para exemplificar a teoria.”
Categoria 3
Associada à compreensão matemática de maneira mais ampla
“Conseguir ver e entender o conteúdo matemático mesmo quando representado de formas diferentes. Por exemplo, consegui compreender que o número 2 é a mesma coisa que dois, que é a mesma coisa que o dois representado por desenhos.” “O uso de recursos visuais contribui e muito para o aprendizado da matemática, sabemos que cada pessoa tem um tempo de aprendizado. Por isso é necessário que o professor crie estratégias para ampliar as possibilidades de cada aluno utilizando o raciocínio visual. Às vezes as questões de matemática são muito abstratas e o recurso visual ajuda o aluno a concretizar o raciocínio.”

Fonte: As autoras

Houve muitos registros que apontaram os esquemas importantes para auxiliar a

compreensão, superar dificuldades e tornar as propostas mais fáceis. Apesar de defendermos um processo de visualização interativo, acreditamos que essas visões são importantes para que os licenciandos passem a considerar a utilização de esquemas em suas práticas futuras.

Na visão dos licenciandos, houve frequente relato de dificuldade de compreensão dos esquemas. Relataram nunca haver realizado tarefas dessa natureza em sua trajetória escolar e pela primeira vez estavam tendo essa experiência. Ao mesmo tempo, registraram a importância do ensino e identificaram aspectos de visualização para além do trabalho em Geometria.

5. Considerações Finais

Resgataremos aqui um diálogo entre os objetivos iniciais e os resultados, apontando possíveis lacunas que não puderam ser contempladas no âmbito desta pesquisa. Como objetivo, nossa investigação buscou identificar como os licenciandos em pedagogia compreendem e se expressam quando resolvem tarefas utilizando uma abordagem com ênfase nos processos de visualização.

No que tange o trabalho com visualização, o contexto geométrico tem sido tradicionalmente objeto desse campo de estudo. Nossa proposta foi a de relacionar o conceito de visualização com números e operações, um caminho pouco usual. A apresentação de esquemas relacionados com perguntas suscitou as respostas dos licenciandos. A possibilidade de enviarem fotos como respostas tornou possível o acesso a uma riqueza de ideias envolvendo as operações. Em alguns casos identificamos a não precisão dos conceitos matemáticos ou uma determinada confusão entre representações numéricas em conjuntos discretos e contínuos.

Um aspecto relevante é que, quando um aprendiz é convidado a construir estratégias de cálculo, sem uma imposição inicial dos algoritmos, acaba construindo esquemas de forma a tornar a comunicação com o professor possível. Contudo, o professor precisa compreender uma representação original construída pelo estudante, ou identificar, em uma resposta autoral, elementos que sinalizem a produção de significados matemáticos.

“Reta numérica. Aprender a fazer conta com a reta.” foi a resposta de um licenciando, que expressa uma síntese de nossa intencionalidade inicial, que foi de utilizar a reta numérica para operar. Todos os outros significados produzidos contribuem com um repertório de diferentes modos que constituem os processos de visualização desses licenciandos.

O uso da reta numérica e o esquema apresentado suscitaram muitas respostas na categoria Dinâmico, nesse caso, o processo para realização da operação ficou mais evidente. Porém, mesmo no caso de respostas que não fizeram uso da reta numérica, foi possível identificar esta categoria, pois o processo de realização das operações foi registrado.

Na categoria Estático, identificamos respostas que indicam que o licenciando não se apropriou do contexto proposto, podendo estar ainda preso às suas formas consolidadas de operar. Nesse caso, o licenciando apresenta um registro que indica

apenas a solução final, embora não seja possível afirmar que ele não saiba realizar o processo, pois pode ter sido uma opção de registro.

A investigação desenvolvida mostrou a importância de estudos sobre visualização para a compreensão de operações em diferentes conjuntos numéricos. Ao mesmo tempo, durante a busca por referenciais teóricos, identificamos ausência de estudos que relacionam a visualização com as áreas de Aritmética e Álgebra, pois a grande maioria das pesquisas aborda o pensamento geométrico. Dessa forma, sugerimos que sejam produzidos outros estudos nessa direção.

1. Introdução

Grande parte dos estudantes possui dificuldades em perceber a Matemática como uma ciência organizada (LELLIS; IMENES, 2001). O aprendizado de Matemática deve estar vinculado ao domínio de saber pensar matematicamente e não se basear na memorização (OLIVEIRA; VELASCO, 2007).

Dessa forma, o ensino de Matemática não deve focar na transferência de conhecimentos, mas sim em criar situações em que o estudante é estimulado a criar as construções mentais necessárias (DIKOVIĆ, 2009). Trabalhar com Geometria, em particular, nos permite entender as representações geométricas que fazem parte do nosso cotidiano e desenvolver habilidades de experimentar, representar, descrever e argumentar, bem como estimular a imaginação e a criatividade.

De acordo com Bastos (1999), a Geometria possibilita interpretar, entender e intervir no espaço em que vivemos, assim como permite a visualização de objetos e de suas representações, a manipulação dessas representações e a criação de novos objetos. Inclui também a resolução de problemas de aplicação da Geometria. Por isso, nas aulas de Geometria, é importante trabalhar atividades que explorem objetos do cotidiano. Tudo o que utilizamos, produzimos e consumimos no mundo físico tem a forma tridimensional (GÜVEN; KOSA, 2008).

Neste capítulo exponho um panorama do ensino de Matemática, dando ênfase à Geometria no currículo escolar e apresento autores que tratam das dificuldades referentes ao seu ensino e aprendizagem. Dentro deste contexto, utilizo as teorias encontradas na literatura que tratam do desenvolvimento do processo de visualização e das habilidades visuais que podem ser potencializadas, visando minimizar as dificuldades relacionadas a esse processo.

2. O ensino de Geometria e a visualização

O ensino de Matemática deve estar voltado para a valorização da compreensão dos aspectos espaciais que fazem parte da vida do estudante (SUSILAWATI; SURYADI; DAHLAN, 2017). O aprendizado em Geometria, em particular, precisa ser responsável pelo desenvolvimento do pensamento geométrico, a fim de promover o enriquecimento da compreensão dos alunos (PITTALIS; CHRISTOU, 2010).

O trabalho realizado com Geometria prioriza, ainda, o espaço plano, abordando principalmente as figuras planas e os polígonos mais conhecidos. No entanto, outros tipos de formas aparecem em nosso cotidiano (BAIRRAL, 2009). Quando se trata do ensino de Geometria Espacial, os conceitos básicos de Geometria Plana que os alunos conhecem são escassos, o que gera muitas dificuldades com relação à visualização e representação necessárias à

21 UFRRJ. Contato: sottamy@gmail.com

A visualização, assim como a Geometria, está presente em outros ramos da Matemática, como a Álgebra, por exemplo. Essa é multifacetada e enraizada na Matemática, possuindo importantes aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

Em Matemática, a visualização não é um fim em si, mas um meio para um fim, que é a compreensão (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991). De acordo com Costa (2002), ela está muitas vezes restrita à mente do aluno, outras vezes está restrita a algum meio e ainda pode ser um processo que transita entre estes dois domínios.

O termo visualização pode assumir diferentes significados e, como não há um consenso para a terminologia a ser utilizada, existe uma diversidade de termos empregados pelos autores, tais como imagens visuais, pensamento visual, raciocínio²² visual e visualização que, aparentemente, possuem o mesmo sentido. A literatura escolhida vai ao encontro da minha percepção sobre visualização²³ e considera os diferentes sinônimos utilizados para defini-la e os quais julgo como equivalentes²⁴.

Veloso (1998) afirma que visualizar não é somente o ato de ver um objeto, como se não existisse nesse momento nenhum tipo de raciocínio ou cognição. A visualização é um tipo de atividade de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, com o intuito de resolver problemas ou provar propriedades (GUTIÉRREZ, 1996).

Segundo Lemos e Bairral (2010), a visualização se torna uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da Matemática, apesar da língua oral e escrita ser a mais utilizada em sala de aula. Assim, o desenvolvimento da visualização contribui para a construção de um conhecimento matemático mais significativo e que valoriza o pensamento geométrico.

Kaleff (2003) defende que a visualização é um processo importante em Geometria e que é uma habilidade que precisa ser desenvolvida. No entanto, visualizar não é um processo simples e se trata de uma habilidade individual, pois envolve muitos aspectos, tais como interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos e mudanças de formas (LE MOS; BAIRRAL, 2010). Zimmermann e Cunningham (1991) a descrevem como o processo de formação de imagens (mentalmente, com lápis e papel, ou com a ajuda da tecnologia), usando essas imagens de forma eficaz para descoberta e compreensão matemática.

Presmeg (1986) tem uma concepção mais ampla e associa visualização à imagem visual, que consiste em um esquema mental que ilustra informação visual ou espacial, mas não especifica se é exigida a presença de um objeto ou de outra representação externa. O Quadro 4 ilustra os

22 Pittalis e Christou (2010) consideram que raciocínio refere-se a um conjunto de processos e habilidades que atuam como uma ferramenta viável na resolução de problemas e nos permitem ir além das informações fornecidas.

23 Acredito que o pensamento visual inter-relaciona as representações 2D e 3D de um objeto. É um processo que transita em diferentes dimensões (plana ou espacial), sem priorização de uma delas.

24 Mariotti *apud* Costa (2002) induz a distinção entre visualização, que considera trazer à mente imagens de coisas visíveis, e pensamento visual, como o pensar sobre coisas abstratas que originalmente podem não ser espaciais, mas que podem ser representadas na mente de alguma forma espacial. Este é um exemplo que não se aproxima dos interesses da pesquisa, pois não faço distinção entre estes termos.

cinco tipos de imagens visuais no raciocínio matemático identificados pela autora.

Quadro 4 – Os cinco tipos de imagens visuais segundo Presmeg (1986)

Imagens concretas e pictóricas	“Figuras na mente”, mas não a mesma para todos.
Imagens de padrões	Representam relações matemáticas abstratas de forma visual.
Imagens de fórmulas	Alguns alunos podem “ver” em suas mentes uma fórmula, pois foi escrita no quadro ou no livro didático.
Imagens cinestésicas	São criadas, transformadas ou transmitidas com a ajuda de movimentos físicos (gestos ou outras expressões corporais etc.).
Imagens dinâmicas	Envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem visual concreta.

Fonte: Elaboração da autora

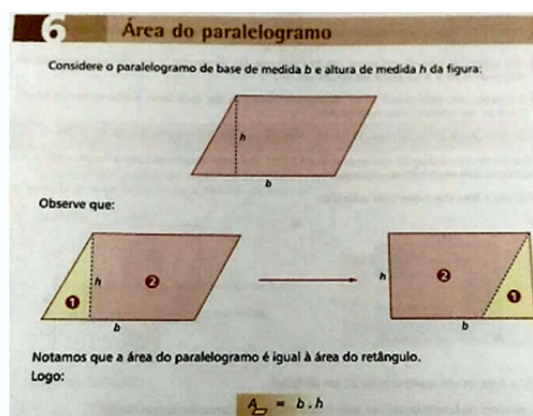
De acordo com Dreyfus (1991), quando os currículos passaram a contemplar o raciocínio visual, os professores muitas vezes apresentam em aula atividades envolvendo o raciocínio visual como um tratamento introdutório, acessório ou auxiliar. Essa abordagem, segundo o autor, pode ser pelo fato de os especialistas, matemáticos, desenvolvedores curriculares ou professores não atribuírem relevância e *status* matemático para o raciocínio visual. Essa atitude de descaso pode fazer com que os alunos pensem que não é necessário saber e usar os argumentos visuais.

Esta é uma situação preocupante, visto que a visualização não envolve uma intuição superficial e vaga de uma ideia matemática. Ela também dá profundidade e significado à compreensão dos objetos e propriedades matemáticas, serve como um guia confiável para resolução de problemas e inspira descobertas criativas (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

2.1 Algumas dificuldades relacionadas à visualização

Arcavi (2003) propõe três categorias de dificuldades em torno da visualização: cultural, sociológica e cognitiva. A dificuldade cultural se refere às crenças e valores que se têm sobre a Matemática e o fazer matemático, o que é legítimo ou aceitável e o que não é. É o caso das demonstrações visuais (Figura 62), as quais são rejeitadas pela comunidade matemática e seus principais representantes. Crenças como essas provavelmente vão se instalar na sala de aula por meio de materiais curriculares, formação de professores etc. Como consequência, não há espaço suficiente para incorporação e valorização da visualização nas aulas de Matemática.

Figura 62 – Exemplo de demonstração visual.



Fonte: SILVEIRA; MARQUES, p. 320, 2007.

De acordo com Arcavi (2003), as dificuldades sociológicas podem ser associadas à frase “visual é difícil de ensinar”, isto é, quando, ao adaptar o conhecimento científico ao conhecimento curricular, esse processo lineariza, compartimentaliza e, possivelmente, também algoritmiza o conhecimento, o que acarreta a perda de ricas interconexões. Com isso, o autor acredita que muitos professores podem sentir que as representações analíticas, que são de natureza sequencial, parecem ser mais pedagogicamente apropriadas e eficientes no ensino.

Outro tipo de dificuldade de caráter sociológico é a tendência das escolas, em geral, a ensinarem Matemática a estudantes de diferentes origens culturais. Alguns são oriundos de culturas visualmente ricas (grafiteiros, povos indígenas, serigrafeiros etc.) que apresentam maior familiaridade com a visualização. Infelizmente, a prática escolar em Geometria desperdiça essa oportunidade.

Embora as dificuldades culturais e sociológicas tenham importância no contexto do ensino de Geometria, Arcavi (2003) deu destaque às dificuldades cognitivas. Quando se lida com imagens conceitualmente ricas, geralmente a demanda cognitiva é alta, gerando desconforto e insegurança nos alunos em relação aos procedimentos adotados para a representação dos objetos. Um exemplo de dificuldade cognitiva é quando o sujeito visualiza um cubo e seus componentes (vértices, faces, arestas, diagonais etc.), mas apresenta erros quando precisava representar suas seções planas (cortes) (SETTIMY, 2014).

Reforço a ideia defendida por Veloso (1998) de que a visualização deve estabelecer conexão com a representação. Para diminuir as dificuldades em representar é preciso criar estímulos a fim de aprimorar a habilidade de visualizar, tanto para fazer distinção entre objetos bidimensionais e tridimensionais quanto para representá-los. Também é necessário realizar mais atividades de visualização em que o aluno deve fixar um referencial de modo a encontrar a representação correta.

2.2 Habilidades relacionadas à visualização

Com o intuito de minimizar as dificuldades cognitivas, um ponto de partida interessante seria identificar as habilidades relacionadas à visualização, criando estratégias de modo a

desenvolvê-las. Bishop²⁵ apud Costa (2002) reconhece duas habilidades na visualização: a capacidade de interpretar informação figural (IFI) e a capacidade de processamento visual de figuras (VP). IFI envolve o conhecimento do “vocabulário geométrico” e capacidade de ler e interpretar imagens visuais a fim de obter informações relevantes que possam ajudar a resolver uma atividade. Por outro lado, VP é a capacidade de manipular e transformar imagens mentais e abrange a visualização e a tradução de relações abstratas e de informação não figural em termos visuais.

O modelo desenvolvido por Pittalis e Christou (2010) abrange cinco tipos de raciocínio visando descrever as habilidades dos estudantes em Geometria 3D, sendo eles: manipular diferentes modos de representação de objetos 3D; reconhecer e construir planificações; estruturar matrizes 3D de cubos; reconhecer as propriedades das formas 3D e comparar as formas 3D; e, calcular o volume e a área de sólidos. O Quadro 5 descreve detalhadamente cada tipo de raciocínio.

25 BISHOP, Alan. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 11(1), 7-15, 1989.

Quadro 5 – Cinco tipos de raciocínios em Geometria 3D

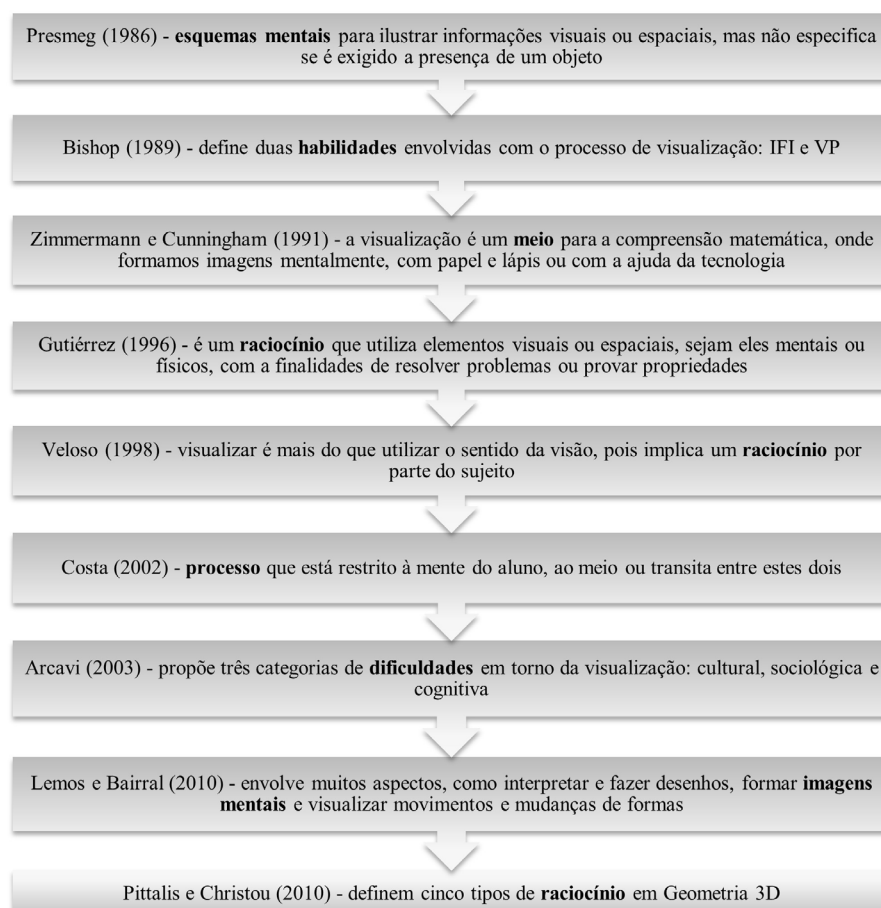
Manipular diferentes modos de representação de objetos 3D	As representações planas são as mais utilizadas para representar figuras planas na Matemática escolar. No entanto, os estudantes apresentam grandes dificuldades em desenhar figuras tridimensionais, pois não é um processo trivial. Como consequência, os alunos podem interpretar mal um desenho e não entender se ele representa um objeto 2D ou 3D.
Reconhecer e construir planificações	A construção de uma planificação pressupõe a correlação entre a representação mental do objeto como um todo e a decomposição de suas partes componentes. Exige a capacidade dos alunos para compreender objetos 3D e fazer suas planificações, focando nas partes componentes dos objetos em ambos os modos de representação.
Estruturar matrizes 3D de cubos	Identificar quantos cubos de menor aresta cabem no cubo maior. O desenvolvimento desta habilidade não é simples, pois exige que os alunos estabeleçam um modelo mental que forneça diferentes visões do objeto.
Reconhecer as propriedades das formas 3D e comparar as formas 3D	Mesmo que qualquer tipo de poliedro seja composto pelas mesmas partes, seu tamanho, número e forma de faces são particularidades de cada poliedro. É preciso entender como os elementos do sólido estão inter-relacionados e que esta compreensão pode se referir ao mesmo objeto ou entre objetos diferentes. Os alunos devem compreender que cada objeto 3D tem uma série de propriedades geométricas invariantes e variantes com base nas propriedades das partes componentes isoladas e suas próprias propriedades como um todo.
Calcular o volume e a área de sólidos	A Geometria Espacial também envolve a capacidade dos estudantes de calcular o volume e a área de superfície de um sólido. O aluno tende a se concentrar principalmente nas fórmulas e nas operações numéricas necessárias e não compreende esses conceitos geometricamente.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Pittalis e Christou (2010).

De acordo com Pittalis e Christou (2010), esse conjunto de processos e habilidades atua como uma ferramenta viável na resolução de problemas, permitindo ir além das informações fornecidas pelos objetos. Por isso, para não ter dificuldade diante destas situações, os alunos devem adquirir e aprimorar um conjunto de “habilidades” de visualização para realizar os processos necessários com imagens mentais específicas (CHRISTOU et al., 2005).

A partir do referencial teórico, foi possível elaborar uma linha temporal (Figura 63), destacando a preocupação dos estudos a respeito da visualização.

Figura 63 – Visualização em uma linha do tempo.



Fonte: Elaboração da autora.

Por meio desta organização, é possível inferir que o foco inicial era elaborar uma definição de visualização na qual não se especificava a utilização de outros recursos para potencializá-la. À medida que os estudos foram avançando, a visualização passou a ser vinculada a processos cognitivos e, em seguida, compreendida como um meio para a resolução de problemas, aliada a materiais como papel, lápis e outros recursos tecnológicos. Posteriormente, a atenção se destinou às dificuldades provenientes do visualizar, pois envolviam muitos aspectos, como formar imagens mentais e interpretar desenhos, e dependiam do recurso didático que estava em mediação. Estudos mais recentes convergem para o resgate de habilidades relacionadas ao raciocínio geométrico e estratégias que podem contribuir para o seu desenvolvimento valorizando, inclusive, possibilidades variadas.

3. A utilização de recursos didáticos variados para o desenvolvimento da visualização

A visualização é compreendida como um processo de formação de imagens que transita entre as representações bidimensionais e tridimensionais, sem priorizar uma delas. Essas imagens podem ser geradas sem que necessariamente o objeto esteja presente em nosso campo visual. Porém, é possível que o sujeito não diferencie de forma adequada a relação entre elementos de objetos espaciais sem a ajuda de materiais concretos, isto é, quando não utiliza tais materiais e depende exclusivamente de sua habilidade de visualização, estará mais propenso a equívocos (SUSILAWATI; SURYADI; DAHLAN, 2017).

Os recursos didáticos variados podem ser grandes aliados do aprendizado geométrico. Se utilizados ao longo de todo o processo de escolarização, o aluno vai construir de forma contínua uma “memória” de imagens que serão suporte para situações mais complexas que envolvam visualização (VELOSO, 1998). Além disso, esses recursos servem de apoio pedagógico para o professor e podem lhe proporcionar novos conhecimentos, contribuindo para que o docente também avalie a sua própria prática.

A visualização e a representação estão intimamente conectadas. No entanto, os alunos ainda possuem muitas dificuldades em resolver atividades que envolvam esses dois processos (SETTIMY; BAIRRAL, 2020). Muitas vezes, os sujeitos têm ciência da ideia matemática envolvida nas atividades, porém apresentam dificuldades em representar o que visualizaram (BAIRRAL; SETTIMY; HONORATO, 2013).

Pittalis e Christou (2010) destacam que

[...] representar objetos 3D é essencial para conceitualizar propriedades matemáticas em representações 2D de objetos 3D e, ao mesmo tempo, conceitualizar propriedades matemáticas pode contribuir para uma melhor compreensão dos modos representacionais de objetos 3D (PITTALIS; CHRISTOU, 2010, p. 208, tradução nossa)²⁶.

Dessa forma, a prática de utilizar uma variedade de recursos em sala de aula deve ser incentivada visando diminuir as dificuldades da visualização e representação das vistas de objetos tridimensionais. O estudante precisa ter uma habilidade de visualização mais refinada, pois uma das maiores dificuldades encontradas por ele consiste em representar em duas dimensões as imagens tridimensionais formadas em sua mente (VELOSO, 1998).

Portanto, ao utilizar recursos variados nas aulas de Matemática, temos a possibilidade de tornar a disciplina mais atraente para os estudantes. Além disso, os discentes podem aprender em Geometria por meio do movimento e exploração das formas, sendo possível visualizá-las tanto nos materiais manipuláveis quanto em ambientes de Geometria Dinâmica como o GeoGebra (SETTIMY; BAIRRAL, 2019).

Neste sentido, é importante implementar atividades com recursos variados a fim de contemplar a pluralidade da sala de aula e trazer diferentes contribuições ao aprendizado geométrico. Isto demanda um aprendizado especial que permita aprimorar o conhecimento matemático, visto que esta habilidade varia de sujeito para sujeito (KALEFF, 2016a.).

Ao utilizar e manipular tais materiais nas aulas, o desenvolvimento da visualização dos alunos surge como consequência (VELOSO, 1998). Dessa forma, desenvolver atividades com estes recursos faz com que os estudantes aumentem sua motivação para aprender e construir seu próprio conhecimento matemático.

26 [...] representing 3D objects is essential in conceptualizing mathematical properties in 2D representations of 3D objects and at the same time conceptualizing mathematical properties may contribute to a better understanding of the representational modes of 3D objects.

4. Visualizando algumas considerações

A visualização é uma habilidade importante do pensamento matemático e, por se tratar de um processo individual e que não é inato, precisa ser ensinado. Quando o pensamento visual é pouco desenvolvido, os estudantes tendem a sentir mais dificuldade na realização de uma atividade. Por isso, é necessário um trabalho contínuo que vise explorá-lo em todos os anos de escolaridade e com recursos de tamanhos (pequenos, médios, grandes) variados.

Aprender Geometria é muito mais do que simplesmente utilizar fórmulas para calcular áreas e volumes de objetos em contextos exclusivamente matemáticos. É importante investir em uma arquitetura de aula focada na utilização de recursos variados que possibilitem o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em uma sociedade em que os aspectos visuais predominam, cada vez mais se torna essencial “aprender a ver”. A utilização de materiais manipulativos, bem como ambientes de Geometria Dinâmica, por exemplo, favorece a construção dos conceitos geométricos, possibilitando que o estudante explore as representações dos objetos sob vários ângulos. Desenvolver um trabalho em sala de aula com uma variedade de recursos implica em diferentes contribuições ao aprendizado dos discentes.

A visualização precisa ser estimulada constantemente para que os alunos aprendam a lidar com atividades e situações cada vez mais complexas. Estimular a visualização possibilita novas formas de entender e enxergar a Matemática. Visualizar se trata de olhar além e esse olhar deve ser constantemente estimulado em nossos estudantes. São outros olhares, estimulantes, envolventes e pensantes!

VISUALIZANDO ALÉM

George William Bravo de Oliveira

Soraya Izar

Viajar pelos capítulos tendo a Geometria como guia é deixar se contaminar por inteiro a fim de ganhar uma nova visão do mundo. Olhar as coisas para entender os conceitos geométricos e vice-versa. Deixar-se inundar pela curiosidade que a criança tem ao desmontar um brinquedo para ver como funciona ou construir um novo com outros objetos. Que essa criança nunca abandone o adulto. Que a brincadeira seja uma coisa séria, capaz de favorecer o aprendizado de professores e alunos.

Esperamos que você, caro leitor, tenha aproveitado a viagem pelas ideias e contribuições propostas nos capítulos apresentados. Neste roteiro trilhado, conhecemos um pouco sobre a história, as pesquisas e relatos de experiências relacionados à Educação, Matemática e à Pedagogia. Conhecemos um pouco a respeito de pessoas que pensaram em mudar alguma estrutura educacional partindo de uma iniciativa própria, mudanças possíveis de serem produzidas.

Acreditamos que esta seja apenas uma etapa dos inúmeros roteiros que podemos trilhar pelo fascinante e vasto tema da visualização, seja trabalhando com recursos físicos, manipulativos ou contando com estímulo e o dinamismo dos recursos tecnológicos. Um roteiro para instigar a reflexão sobre o tema.

Os textos enfatizam a relevância de se trabalhar a visualização geométrica desde a educação básica. Importante habilidade que contribui ativamente para a atividade cognitiva e que não se restringe apenas aos estudos em Geometria, mas que atua como fio condutor para o raciocínio em outras áreas do conhecimento.

Assim, concluímos esta viagem, mas não a jornada. Continuamos a trilhar novos caminhos, investindo em pesquisas e experimentando novas atividades que contribuam para estimular a visualização geométrica.

Que tal planejarmos um novo roteiro? O convite está feito.

POSFÁCIO

Retratos de experiências para visualização em Geometria (2022) é um livro que trata do tema Visualização, que estará sempre em discussão na Educação Matemática, principalmente no ensino de Geometria e demais aspectos que incitam a reflexão e resolução de raciocínio matemático na representação simbólica, algébrica e pictórica de inúmeros conceitos.

Os textos que compõem o livro enfatizam a relevância de trabalhar a visualização geométrica desde a Educação Básica até a formação de professores que irão ensinar Matemática, habilidade que contribui para a atividade cognitiva e que, de acordo com os textos apresentados no decorrer dos capítulos, não se restringe apenas aos estudos exploratórios de Geometria, mas está presente também no raciocínio em outras áreas do conhecimento matemático.

Os estudos contemplam reflexões teóricas a respeito do tema e, também, dinâmicas didático-pedagógicas para o ensino de Matemática, além de articular diferentes elementos de ensino e aprendizagem, sempre considerando as posturas e definições assumidas para visualização, muito coesas, por parte do grupo de autores.

Os capítulos estão bem escritos, estruturados e organizados em sua totalidade e estabelecem reflexões muito pertinentes que contribuem, em todos os sentidos, com pesquisadores e professores que ensinam Matemática na perspectiva da visualização na construção e domínio cognitivo de conceitos matemáticos em suas diferentes áreas de abrangência. Tais áreas contemplam desde a Geometria até o tratamento de números inteiros, fracionários e, ainda, a representação pictórica.

Os textos registram uma rica discussão a respeito do ver, visualizar e representar. E mais: realizam um panorama de pesquisas estrangeiras e brasileiras que tratam da visualização e representação em Geometria e, ainda, sobre obstáculos cognitivos advindos de lacunas no desenvolvimento da visualização, na discussão de aspectos da Geometria Plana, Espacial e Geometrias não euclidianas.

Abordam também o papel da visualização na construção e no desenvolvimento conceitual, potencializado por ambientes de geometria dinâmica, em dispositivos móveis com toques em telas, particularmente o aplicativo GeoGebra em smartphones. Além disso, trazem a discussão de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana e da construção e análise de um objeto geométrico mediada pelos cliques no mouse, diferente da mediação dos toques na tela.

Proporcionam, reflexões sobre a habilidade de visualização para o estudo da Geometria, lançando mão de recursos didáticos e utilizando como estratégia de aprendizagem o esboço de plantas baixas, a construção de maquetes e de projetos arquitetônicos. Portanto, o desenvolvimento da visualização é considerado como habilidade para a aprendizagem do conceito geométrico, principalmente na Geometria Espacial. Evidenciam também que a visualização não é uma habilidade inata e, por isso, necessita ser desenvolvida com a contribuição de recursos didáticos variados, os quais podem ser virtuais ou concretos.

Na relação entre a visão e a vista, a visualização foi discutida na disciplina de Desenho Básico em experimentações entre o que aparece e o que é visto de uma determinada posição de um objeto, de uma pessoa ou da cena de uma paisagem. Nesse sentido, valorizam a observação como grande parceira do processo de visualização, realizando-se, também, um estudo a respeito da linguagem, que se descortina e traz outros significados para expressões com definições teóricas. A visualização não é considerada inata, necessitando, portanto, ser instigada, incrementada, ou seja, é uma habilidade que precisa ser estimulada e desenvolvida em todos os níveis da educação básica. As atividades destacadas objetivam desenvolver habilidades com recursos como pranchetas, quadro de giz, papel, régua, lápis, borracha, os quais contextualizam o meio vivido a partir de embalagens para, por exemplo, visualizar faces de um prisma. Por esse motivo, a visualização é destacada como essencial para o registro imagético, independente do suporte escolhido na Disciplina de Desenho Básico, que depois evolui para a utilização de programas gráficos de desenho.

Outro aspecto muito importante apresentado nos estudos do livro diz respeito a uma prática pedagógica desenvolvida com licenciandos de um curso de formação de professores que irão ensinar Matemática, usando esquemas para resolver os problemas. Tal prática proporcionou a compreensão de tarefas, como metodologia de ensino, para incorporar na futura prática pedagógica, que abrangem propostas investigativas e exploratórias da reta numérica, das Régua de Cuisenaire e da contagem de quantidades discretas. Assim, uma discussão a respeito do processo de visualização reflete sobre o uso de esquema na resolução de operações de adição e subtração de números naturais e racionais, salientando que o conhecimento não é uma parte da experiência, mas se dá na experiência.

Por fim, a obra evidencia uma discussão a respeito do ensino de Matemática, dando ênfase à Geometria no currículo escolar, que trabalha teoricamente sobre o desenvolvimento do processo de visualização e das habilidades visuais potencializadas no processo. Promove uma discussão a respeito de três categorias de dificuldades em torno da visualização: a cultural, a sociológica e a cognitiva. Destaca a habilidade de visualizar, tanto para fazer distinção entre objetos bidimensionais e tridimensionais, quanto para representá-los, como um meio para a resolução de problemas.

Parabéns a todos os autores e organizadores pela obra como um todo, que está muito bem estruturada na ordem dos capítulos, nos referenciais que se complementam e nas sugestões de atividades exploratórias distribuídas ao longo de todos os textos. Constitui-se em uma contribuição válida para pesquisadores e professores que ensinam Matemática, em formação inicial e continuada, além de apresentar potenciais reflexões teóricas sobre o tema visualização. A leitura foi uma grande e desafiante viagem.

Nilce Fátima Scheffer

UFFS, Chapecó, SC

Junho de 2022

REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA MACHADO, Sílvia Dias. (Org.) **Aprendizagem Matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003.
- ALMEIDA, Thiago de Almeida; LOMÔNACO, José Fernando Bitencourt. **O conceito de amor: um estudo exploratório com participantes brasileiros**. São Carlos: Pedro & João editores, 2018.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Matemáticos. In: ALCÂNTARA MACHADO, Sílvia Dias. (Ed.) **Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003. p.125-147.
- ALEXANDER, Daniel C.; KOEBERLEIN, Geralyn M. **Geometría**, 5a. Ed. Traducción Mtro. Javier León Cárdenas. Facultad de Ingeniería Universidad La Salle, 2013.
- ARAÚJO, Maria Auxiliadora. Sampaio. Porque ensinar geometria nas séries iniciais do 1º grau. **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 2, n. 3, p. 12-16, 1994.
- ARCAVI, Abraham. **The role of visual representations in the learning of mathematics**. Educational studies in mathematics, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.
- ARZARELLO, Ferdinando; BAIRRAL, Marcelo Almeida; DANÉ, Cristiano. Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. **Teaching Mathematics and its Applications**, 33(1), 39-51. 2014.
- ARZARELLO, Ferdinando; OLIVERO, Federica; PAOLA, Domingo; ROBUTTI, Ornella. A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. **ZDM**. N. 3, v. 34, p. 66-72, 2002.
- ASSIS, Alexandre; HENRIQUE, Marcos Paulo; BAIRRAL, Marcelo Almeida. GRAVAÇÕES DE TELAS: CAPTURA DE TOQUES REALIZADOS POR ALUNOS EM DISPOSITIVOS MÓVEIS. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 19 - 32, 5 ago. 2020.
- ATIYAH, Michael. What is geometry? **The Mathematical Gazette**, 66 (437): oct, 1982.
- AZEVEDO, Thiago. **Esquemas (Psicologia): Teoria de Piaget, assimilação e acomodação**. Disponível em <<https://psicoativo.com/2016/07/esquemas-psicologia-teoria-de-piaget-assimilacao-e-acomodacao.html>> Acesso em 20 jan. 2021.
- BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da informação e comunicação na formação e educação matemática**, Seropédica: EDUR, 2009.
- BAIRRAL, Marcelo Almeida. As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**

(JIEEM), v. 10, n. 2, p. 104-111, 2017.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. Dimensões a considerar na pesquisa com dispositivos móveis. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, número 94, p. 81-95, 2018.

BAIRRAL, Marcelo Almeida; SETTIMY, Thaís Fernanda de Oliveira; HONORATO, Vinícius. Secionando um cubo: o que fazer se três pontos não determinarem um plano? **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, 2(1), 180-202. 2013.

BAIRRAL, Marcelo Almeida; ARZARELLO, Fernando; ASSIS, Alexandre. Domains of manipulation in touchscreen devices and some didactic, cognitive and epistemological implications for improving geometric thinking. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert (Eds.), **Mathematics and technology: a CIEAEM source book**, p. 113-142. Springer, 2017.

BAIRRAL, Marcelo Almeida; HENRIQUE, Marcos Paulo; ASSIS, Alexandre. Moving Parallel And Transversal Lines With Touches On Smartphones: A Look through Screenrecording. **The Mathematics Enthusiast**, Vol. ---, n. 1, 2021 (prelo).

BARBOSA, Andreia Carvalho Maciel; BARBOSA, Gabriela dos Santos; PEDROSA, Stella Maria Peixoto de Azevedo; OLIVEIRA, Rosana; SILVA, Ana Lúcia Vaz da. **Matemática na Educação 1**. v.1. edição reformulada, Rio de Janeiro. Fundação Cecierj, 2009

BASTOS, Rita. **Geometria no currículo e pensamento matemático**. 1999. Disponível em: <<https://em.apm.pt/index.php/em/article/download/773/769/2287>>. Acesso em: 15 jun 2022.

BISHOP, Alan. **Review of research on visualization in Mathematics Education**. Focus on learning problems in Mathematics, Massachusetts: Center for Teaching/ Learning of Mathematics, v. 11, n.1, p. 7-16, 1989.

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 1996.

BRANDÃO, Eduardo Rangel. **Publicidade on-line, ergonomia e usabilidade: o efeito de seis tipos de banner no processo humano de visualização do formato do anúncio na tela do computador e de lembrança da sua mensagem**. Rio de Janeiro, 2006. 400 p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Artes & Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em 28 Out. 2020

CASTRO, Mônica Rabello; FRANT, Janete Bolite. **Modelo de Estratégia Argumentativa: análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem**. Curitiba: Editora UFPR, 2011.

CASTRO-FILHO, José Aires; FREIRE, Raquel Santiago; CASTRO, Juscileide Braga de. Tecnologia e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 93-98, 2017.

CHRISTOU, Constantinos; PITTALIS, Marius; MOUSOULIDES, Nicholas; JONES, Keith. **Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design**. 2005.

CLEMENTS, Douglas H; BATTISTA, Michael T. Geometry and spatial reasoning. In: GROWS, D. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: NCTM, 1992. p. 420-465.

COSTA, Conceição. Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, M; COELHO, I.; MATOS, J. (Org(s), Ed(1). **Ensino e Aprendizagem de Geometria**. Lisboa, Portugal Editora, 2002. p. 157-184.

COSTA NÓBRIGA, Jorge Cássio. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **REVEMAT**, n.15, p. 1-21, 2019.

DAMÁSIO, António. **O mistério da consciência: do corpo e das emoções do conhecimento de si**. Tradução de L. T. Motta. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

DE VILLIERS, Michael. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, Março/Abril. 2001.

DEL GRANDE, John. Spatial sense. **Arithmetic Teacher**, vol. 37.6, pp. 14-20, 1990.

DIKOVIĆ, Ljubica. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, v. 6, n. 2, p. 191-203, 2009.

DREYFUS, Tommy. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 1, 33-48, 1991.

DUVAL, Raymond. **Semiosis et Pensée Humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berna: Peter Lang. 1995.

DUVAL, Raymond. Basic issues for research in Mathematics Education. In: 24th INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. **Anais...** Japão. 2000. p. 55-70.

DUVAL, Raymond. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad: LEVY. L. F; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática: representação e construção em Geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERREIRA, Maria Luiza de Almeida Cunha. **Formação e desenvolvimento de conceitos**. Belo Horizonte: Instituto de Educação/Pabae, 1963.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, 24, p. 139-162. 1993.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas. Pesquisa em visualização na Educação Matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n.1, 2012, p. 31-45.

GOLDENBERG, Paul. “**Hábitos de pensamento**” um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, 48, 37-44, 1998.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. [Tese -Doutorado em Informática na Educação]. Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GRAVINA, Maria Alice. O Potencial Semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: Uma experiência ilustrativa. **Vidya**, Santa Maria-RS, v. 35, n. 2, p. 237-235, jul./dez., 2015..

GUTIÉRREZ, Angel. Procesos y habilidades en visualización espacial. **Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática**. Valencia, 1991.

GUTIÉRREZ, Angel. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference** (Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemàtica, 1996.

GÜVEN, Büllent; KOSA, Temel. The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers’ spatial visualization skills. **Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET**, v. 7, n. 4, p. 100-107, 2008.

GUZMÁN, Miguel de; PÉREZ, Daniel Gil. **Enseñanza de las Ciencias y la Matemática**. Madrid: Popular, 1993.

HENRIQUE, Marcos Paulo. **GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

HERSHKOWITZ, Rina. Ensino e Aprendizagem da Geometria. **Boletim Gepem**, n. 32, 1994.

HERSHKOWITZ, Rina; VINNER, Shlomo. The role of critical and non-critical attributes

in the Concept image of geometrical concepts. In: 7th INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. **Anais...** Rehovolt, v. 1, n.1, 1983, p. 223-228.

HERSHKOWITZ, Rina; BEN-CHAIM, David; HOYLES, Celia; LAPPAN, Glenda; MITCHELMORE, Michel; VINNER, Shlomo. Psychological aspects of learning Geometry. In: NESHER, Pearla; KILPATRICK, Jeremy. (Eds) **Mathematics and cognition**. Cambridge: Cambridge University Press, p. 70–95. 1990.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. **Educação Matemática em Revista**. Blumenau, v. 2, n. 2, 1994, p. 19 - 25.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Vendo e entendendo Poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Da rigidez do olhar euclidiano às (im) possibilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de Matemática**. 2004. 514 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. UFF, Niterói, 2004.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. Registros semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às Geometrias não Euclidianas no âmbito da formação de professores de Matemática. **Bolema-UNESP**. Rio Claro-SP. n. 28. p. 69-94. Nov. 2007. Disponível em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1532/1311>>. Acesso em: 20 Out 2020

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Segunda edição. Novas Tecnologias no Ensino da Matemática. CEAD: UFF, 2016a.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. (Org.) **Vendo com as mãos, olhos e mente**: um laboratório e um museu de Educação Matemática para o aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD/UFF, 2016b. Disponível em <<https://bit.ly/2FsX5yz>>. Acesso em: 20 Out 2020.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland; HENRIQUES, Almir de Souza; FIGUEIREDO, Luiz Guilherme; REI, Duque Monteiro. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. **Bolema - UNESP**, Rio Claro, v. 10, p. 21 – 30, 1994.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland; GARCIA, Simone dos Santos; REI, Dulce Monteiro. **Jogos geométricos e formas planas**. 3^a ed. Niterói: EdUFF, 2005.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland; MOURÃO, Ohanna Silva. Licenciandos de Matemática sabem interpretar desenhos e calcular volumes de sólidos elementares construídos por pequenos cubos? In: VI ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO. **Anais...**, Niterói: SBEM-RJ, set. 2014.

LABORDE, Colette. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría, in PUIG, L. (ed.), **investigar y enseñar. Variedades de la Educación matemática**, Bogotá: una empresa docente, 1998.

LABORDE, Colette; CAPPONI, Bernard. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n.62, p. 51-62, 1994.

LAKOFF, George; JOHNSON, Mark. **Metaphors we live by**. p. 3-13. Universidade de Chicago: Chicago, 1981.

LELLIS, Marcelo; IMENES, Luis Márcio. A Matemática e o novo Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 9/10, abril/2001.

LINS, Romulo Campos. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

LINS, Romulo Campos. **O Modelo dos Campos Semânticos**: estabelecimentos e notas de teorizações. *In*: ANGELO, C. L.; BARBOSA, E. P.; SANTOS, J. R. V.; DANTAS, S. C.; OLIVEIRA, V. C. A. (ogs) **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**, São Paulo: Midiograf, 2012.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOMÔNACO, José Fernando Bitencourt. **A natureza dos conceitos**: visões psicológicas. Tese (Livre-docência) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 294 f. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEMONS, Wellington Gonçalves; BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Poliedros estrelados no currículo do Ensino Médio**. Série InovaComTic, vol. 2. Rio de Janeiro: Edur, 2010.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar Geometria?** *In*: **A Educação Matemática em Revista**, Ano III, n° 4, 1° semestre, p. 3-13, Blumenau: SBEM, 1995.

MAGNANI, Lorenzo. Model-Based creative abduction. *In*: MAGNANI, L.; NERCESSIAN, N.; THAGARD, P. (Eds.) **Model - Based reasoning in scientific discovery**. Dordrecht: Kluwer, 1998, p. 219-238.

MAGNANI, Lorenzo. **Philosophy and Geometry**. Dordrecht: Kluwer, 2001.

MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio. **Perspectives on the teaching of Geometry for the 21th Century**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

MARIOTTI, Maria Alessandra. Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In: Sutherland Rosamund, Mason John (eds) **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 138. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

MARTINS, Raquel Bloise; MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 62, p. 101-115, jan./jun. 2014.

MATOS, José Manoel. Acomodando a Teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. **Quadrante-APM**, Lisboa, v.1, 1992, p. 93-112.

MARTOS-RODRIGUES, Zionice Garbelini. **E quando os ângulos não fecham em 180°: as geometrias não euclidianas**. Curitiba: CRV, 2016.

MONTENEGRO, Gildo. **A perspectiva dos profissionais**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1990.

MONTENEGRO, Gildo. **Geometria Descritiva vol. 1**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1991.

MONTOYA, Adrian Oscar Dongo. **PIAGET: imagem mental e construção do conhecimento**. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (Org.) **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval** [Recurso Eletrônico] – Florianópolis : Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p. Disponível em <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/209074>>. Acesso em: 20 Out 2020.

NASSER, Lilian. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil**. 320 p. Tese. (PHD degree). King's College. Center of Educational Studies of University of London. Londres, 1992.

NACARATO, Aldair Mendes; PASSOS, Carmem Lucia Brancaglion. **A geometria nas séries iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NEMIROVSKY, Ricardo; NOBLE, Tracy. **On mathematical visualization and the place where we live**. Educational Studies in Mathematics, v.33, pp.99-131, 1997.

OLIVEIRA, George William Bravo. **Épura ao Vídeo: Desenvolvimento e uso de um aplicativo para o trabalho com Geometria Descritiva**. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2016.

OLIVEIRA, Liliane Lelis de; VELASCO, Angela Dias. **O ensino de geometria nas**

escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá. 2007. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/OENSINO.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

PAVANELLO, Regina Maia. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. **Anais...** Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/>. Acesso em: 16 de out. 2020.

PEREIRA, Aldemar. **Desenho Técnico Básico 6ª ed.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1981. 128p.

PITTALIS, Marios; CHRISTOU, Constantinos. **Types of Reasoning in 3D Geometry Thinking and Their Relations with Spatial Ability.** Educational Studies in Mathematics, 75, 191- 212, 2010.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro; OLIVEIRA, Paulo; CANDEIAS, Nuno. **Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano.** Lisboa: ME-DGIDC, 2009. Disponível em: <http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/temas%20matematicos/Triangulos_quadrilateros.pdf> Acesso em: 01 dez. 2020.

PRESMEG, Norma C. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 6(3), p. 42-46, 1986.

ROGENSKI, Maria Lúcia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades.** 2009. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2014.

RYAN, Mc. **Dublê de Sábio.** Disponível em: <<https://musicatube.com.br/letra/letra-mc-ryan-sp-duble-de-sabio-djay-w/>>. Acesso em: 15 dez. 2021.

SETTIMY, Thais Fernanda Oliveira. **Elaboração e análise de atividades de visualização em Geometria 3D utilizando recursos convencionais.** 2014. 34 f. Monografia – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

SETTIMY, Thais Fernanda de Oliveira. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados.** Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/ Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018. 128p.

SETTIMY, Thais Fernanda Oliveira; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Visualização em Sala de Aula: Revelando Descobertas de Estudantes do Sexto Ano do Ensino Fundamental. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 258-267, 2019.

SETTIMY, Thais Fernanda Oliveira; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SILVA, Ana Lucia Vaz; BARBOSA, Andreia Carvalho Maciel; OLIVEIRA, Rosana; BARBOSA, Maria Tereza Serrano. **Matemática na Educação 2**. v.1. Rio de Janeiro, Fundação Cecierj, 2010.

SILVA, Bárbara Cardoso Chagas da. **Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros: uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Sistema de **Ensino Luz do Saber: Matemática**. 9º ano. Recife, Ed. Construir, 2007.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SUSILAWATI, Wati; SURYADI, Didi; DAHLAN, Jarnawi A. The Improvement of Mathematical Spatial Visualization Ability of Student through Cognitive Conflict. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 12, n. 2, p. 155-166, 2017.

VAN HIELE, Pierre Marie. **Structure and insight: a Theory of Mathematics Education**. Orlando: Academic Press, 1986.

VELOSO, Eduardo. **Geometria: Temas Actuais**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization? *In*: ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics** (pp 1-7). Washington: MAA, 1991.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Ângulos correspondentes	27
Figura 2 - Exemplificação de visualização na análise de um objeto geométrico.....	28
Figura 3 - Construção de um quadrilátero a partir de um triângulo e retas paralelas.....	32
Figura 4 – Triedro – Projeções – Épura	40
Figura 5 – Modelos de Triedros	40
Figura 6 – Diferentes representações gráficas.....	42
Figura 7 – Fotos da Rampa de acesso às salas de desenho da ETEVM e de experiência com a luz do sol e de uma lanterna	42
Figura 8 – Ilustrações da projeção cilíndrica e projeção cônica	43
Figura 9 – Peças em madeira existentes na escola reproduzidas de Pereira (1981)	43
Figura 10 – Peças de estudo montadas com LEGO ou com embalagens diversas.....	44
Figura 11 – Caixa do suco e o resultado da observação das faces: Vista Frontal, Lateral e Superior	44
Figura 12 – Vistas Ortográficas Principais da Caixinha de Suco	45
Figura 13 – Vistas Ortográficas e Cotagem	46
Figura 14 – Escalas com o Google Maps	47
Figura 15 – Frutas como modelos das Vistas Seccionais	48
Figura 16 – Equipamento para visualização das e vistas principais de um objeto	49
Figura 17 – Diferentes possibilidades da soma 59 e 177	56
Figura 18 – Diferentes possibilidades da soma 10	56
Figura 19 – Representação e ordenação de frações	57
Figura 20 – Tarefa Inicial do Questionário	59
Figura 21 – Tarefa Final do Questionário	59
Figura 22 – Representação na reta numérica da Tarefa 2 de Matemática Educação 1	59

Figura 23 – Representação na reta numérica da Tarefa 2 de Matemática Educação 2 59

Figura 24 – Tarefa 2 de Matemática Educação 1 60

Figura 25 – Tarefa 2 de Matemática Educação 2 60

Figura 26 – Tarefa 3 de Matemática Educação 1 61

Figura 27 – Tarefa 3 de Matemática Educação 2 61

Figura 28 – Estrutura da Análise 62

Figura 29 – Reta numérica 1 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 63

Figura 30 – Reta numérica 2 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 63

Figura 31 – Pictórica 1 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 64

Figura 32 – Pictórica 2 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 64

Figura 33 – Pictórica 3 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 64

Figura 34 – Pictórica 4 – “ $5 + 3 = 8$ ” – Dinâmico 65

Figura 35 – Pictórica 5 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático 65

Figura 36 – Pictórica 6 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Dinâmico 65

Figura 37 – Reta numérica 6 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático 66

Figura 38 – Reta numérica 7 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático 66

Figura 39 – Pictórica 10 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático 66

Figura 40 – Pictórica 11 – “ $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ” – Estático 67

Figura 41 – Reta numérica 8 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 67

Figura 42 – Reta numérica 9 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 68

Figura 43 – Reta numérica 10 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 68

Figura 44 – Reta numérica 11 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 68

Figura 45 – Reta numérica 12 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Dinâmico 68

Figura 46 – Reta numérica 13 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 68

Figura 47 – Reta numérica 13 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 69

Figura 48 – Reta numérica 15 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Dinâmico 69

Figura 49 – Pictórica 12 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 69

Figura 50 – Pictórica 13 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 69

Figura 51 – Pictórica 14 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 70

Figura 52 – Pictórica 15 – “ $8 - 3 = 5$ ” – Dinâmico 70

Figura 53 – Reta numérica 16 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico 70

Figura 54 – Reta numérica 18 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico 71

Figura 55 – Reta numérica 20 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico 71

Figura 56 – Pictórica 21 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático 72

Figura 57 – Pictórica 22 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático 72

Figura 58 – Pictórica 23 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático 72

Figura 59 – Pictórica 24 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” – Estático 72

Figura 60 – Reta numérica 19 – “ $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$ ” –Dinâmico 73

Figura 61 – Pictórica 25 – “ $8 - 5 = 3$ ” – Estático 73

Figura 62 – Exemplo de demonstração visual 80

Figura 63 – Visualização em uma linha do tempo 83

ÍNDICE DE QUADROS

[Quadro 1 - Ações dos estudantes na análise de ângulos colaterais internos 36](#)

[Quadro 2 - Organização da Avaliação Complementar 58](#)

[Quadro 3 – Concepções dos licenciandos sobre visualização 74](#)

[Quadro 4 – Os cinco tipos de imagens visuais segundo Presmeg 79](#)

[Quadro 5 – Cinco tipos de raciocínios em Geometria 3D 82](#)

ÍNDICE DE ABREVIATURA E SIGLAS

AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEDERJ	Consórcio Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
DMcTT	Dispositivos Móveis com Toques em Telas
EBA/UFRJ	Escola de Belas Artes da Universidade Federal do Rio de Janeiro
ETEV	Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá
IFI	Capacidade de interpretar informação
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
FAETEC	Fundação de Apoio à Escola Técnica
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFRS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNESP	Universidade Estadual Paulista
VP	Capacidade de processamento visual de figuras



Este livro é publicado pela Edur / UFRRJ
Publicado em 2022

Fonte: Garamond Premier Pro, 15 pt - Regular

