http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2014.035

Análise de erros na resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau: um estudo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Yasmini Lais Spindler Sperafico
UFRGS
yasmini182@hotmail.com

Beatriz Vargas Dorneles
Professora, UFRGS
bvdornel@terra.com.br

Clarissa Seligman Golbert
Professora, UFRGS
mcgolbert@uol.com.br

Resumo
A análise de erros auxilia no processo de ensino das equações algébricas do 1º grau, pois evidencia a existência de conceitos mal formados que impedem o bom desempenho dos estudantes. O presente artigo descreve uma pesquisa qualitativa, que discute algumas hipóteses sobre as origens de erros cometidos por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola municipal da região metropolitana de Porto Alegre, na Tarefa de Resolução de Problemas com Equações Algébricas do 1º Grau (TRPEA). Os resultados apontam muitos erros de ordem procedural, mas com origem em conhecimentos conceituais mal formados.

Palavras-chave: Análise de erros; Resolução de problemas; Equações algébricas do 1º grau.

Error analysis in problem solving 1st degree algebraic equations: an investigation with students attending the 8th year of primary school

Abstract
The error analysis supports the teaching of 1st degree algebraic equations, since it indicates the existence of distorted concepts that inhibit good performance of students. This article presents a qualitative investigation that discusses some hypotheses about the source of errors made by students attending the 8th year of elementary school in a public school in the metropolitan area of Porto Alegre, regarding Problem Solving 1st Degree Algebraic Equations (PSAET). The results point towards many procedural errors, but derived from distorted conceptual knowledge.

Keywords: Error analysis; Problem solving; 1st degree algebraic equations.

Introdução

O erro é um elemento que frequentemente compõe o processo de aprendizagem de um novo conhecimento e evidencia um saber mal construído pelo sujeito. Dessa forma, os erros podem não ser simplesmente ausência de conhecimentos, eles podem expressar conhecimentos malformados que, depois, se tornam resistentes (PINTO, 2000; CURY, 2007) ou conhecimentos e experiências anteriores que são mal sucedidas quando generalizadas a outros contextos. Esse último tipo é denominado por Brousseau (1989) de obstáculo epistemológico. Sua concepção de obstáculo epistemológico comporta outra visão sobre o erro, já que este não é apenas resultado de uma ignorância ou um acaso, mas está relacionado a um conhecimento anterior que deixa de ser bem sucedido quando mal adaptado a novos conteúdos. Nesta perspectiva, o erro pode se transformar em uma ferramenta de ensino para o educador, pois contém informações que podem auxiliá-lo a planejar atividades que ajudem os discentes a transpor esses obstáculos. Uma boa forma de realizar isso é por meio da análise dos erros (CURY, 2007). Dessa forma, destaca-se a importância de verificar os erros cometidos pelos educandos, a fim de desenvolver propostas pedagógicas a partir das dificuldades apresentadas, especialmente em relação à construção do conhecimento algébrico que, conforme Booth (1995), representa um novo patamar na apropriação do conhecimento matemático, o da generalização.

Nesse contexto, há necessidade de pesquisas que discutam os erros cometidos no processo de aprendizagem algébrica, exemplificando com casos que auxiliem a compreender o pensamento do estudante no desenvolvimento de procedimentos de solução. Assim, o presente estudo teve como objetivo analisar, categorizar e discutir as possíveis origens de erros de ordem epistemológica cometidos na resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau, por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da região metropolitana de Porto Alegre. A opção pelo campo algébrico se justifica por esse marcar uma importante ruptura no ensino da Matemática, de um campo mais concreto para outro mais abstrato e generalizável (VERGNAUD, 1996), sendo as equações do 1º grau um dos primeiros conteúdos algébricos formalizados que os alunos têm contato.

Para isso, inicialmente, apresenta-se uma breve discussão sobre o campo algébrico e a resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau. (BOOTH, 1995, BERNARD; COHEN, 1995). A seguir, discute-se o erro no processo de resolução de problemas, destacando a importância de analisá-lo e apresentando possíveis origens para o mesmo, com base em diversos estudos (BOOTH, 1995, FREITAS, 2002; BOOTH, 2011). Por fim, apresenta-se o método adotado e os resultados obtidos.

Resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau

A álgebra é um ramo da Matemática que se ocupa da simbolização de relações numéricas, de estruturas matemáticas e das operações sobre essas estruturas. Seu foco incide no estabelecimento de procedimentos e relações. Assim, a razão de se estabelecer essas relações gerais é usá-las como regras de procedimento para a resolução adequada de problemas encontrando respostas numéricas. Dessa forma, o estudo da álgebra cria um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização e, além disso, lhe possibilita a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BERNARD; COHEN, 1995).

Um dos primeiros conteúdos algébricos apresentado aos alunos é a equação do 1º grau. Essa, na perspectiva de Bernard e Cohen (1995), desempenha um papel importante na Matemática e em muitas de suas aplicações, sendo essencial no ensino da álgebra, já que possibilita a representação e solução de problemas complexos que não poderiam ser resolvidos apenas com recursos aritméticos. Uma equação é caracterizada pela existência de letras indicando valores desconhecidos, denominadas incógnitas ou variáveis, um sinal de igualdade, uma expressão à esquerda da igualdade, denominada de primeiro membro, e uma expressão à direita da igualdade, denominada de segundo membro.

Caracterizado o campo específico de resolução de problemas abordado neste estudo, passa-se a discorrer sobre a importância de analisar e compreender os erros cometidos na resolução de problemas com equações algébricas, discutindo suas possíveis origens (BOOTH, 1995; FREITAS, 2002; BOOTH, 2011).

Uma abordagem sobre o erro na resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau

É por meio da reflexão sobre o processo de resolução de um problema realizado pelo estudante que se pode ter clareza de como este compreende os conhecimentos envolvidos, bem como do motivo que o impede de encontrar a solução correta (CURY, 2007). Como a presente pesquisa foca a resolução de problemas com equações algébricas do 1º grau, apresentaremos estudos e pesquisas que tratam desse tema (Booth, 1995; Kieran, 1995; Freitas, 2002), abordando erros cometidos pelos alunos, bem como as possíveis origens desses erros.

Para facilitar a discussão dos tipos de erros e suas origens, utiliza-se, neste estudo, duas grandes categorias propostas por Freitas (2002): erros relacionados a aspectos conceituais e erros relacionados a técnicas de resolução. Em estudo anterior (SPERAFICO; GOLBERT, 2011), o tema foi previamente explorado com uma amostra menor (N=6) em um estudo-piloto, verificando-se que os erros encontrados poderiam ser organizados nessas duas grandes categorias. No estudo atual, apresenta-se o resultado de um segundo estudo, com uma amostra maior, ampliando-se a discussão[1].

Erros relacionados a aspectos conceituais e suas possíveis origens

O conhecimento prévio dos conceitos e procedimentos envolvidos em um problema é um fator importante para uma resolução adequada, já que são necessários conhecimentos dos dois tipos para obter sucesso no domínio da resolução de problemas algébricos (BOOTH; KOEDINGER, 2008; BOOTH, 2011). O primeiro é o conhecimento conceitual que diz respeito ao reconhecimento e compreensão das características do problema, tais como as variáveis como representantes de vários números, entre outros. Já o segundo tipo de conhecimento, o procedural, se refere à capacidade de realizar uma série de ações para resolver um problema. Assim, o conhecimento conceitual permite que o sujeito compreenda porque um procedimento é mais adequado para determinada tarefa. Como alertam Booth, Koedinger e Siegler (2007), conhecimentos anteriores mal formados ou lacunas nesses conhecimentos levam à seleção incorreta de procedimentos e a erros na sua utilização na resolução de problemas.

Um dos erros destacados por Booth (1995) e Freitas (2002), diz respeito à notação na escrita das equações. Para os autores, se faz necessária a distinção pelo aluno entre expressões como p : q e q : p. Booth (1995) relata que os estudantes não observam essa distinção crucial quando registram ou quando resolvem as equações, o que resulta em erros, sendo que a origem dessa indiferenciação pode ter raízes nas experiências anteriores que os estudantes tiveram no estudo da aritmética. Alguns alunos pensam que a divisão, como a adição, é comutativa e outros não veem necessidade de distinguir as duas formas, acreditando que o maior número sempre deverá ser dividido pelo menor, pois todos os problemas de divisão encontrados em aritmética elementar exigem essa forma. Ainda sugere que uma forma de reverter essa concepção, seria confrontar mais precocemente os estudantes com situações concretas em que um número menor deverá ser dividido por um maior.

Outra fonte de erro comum na resolução de problemas, apontada por Lochhead e Mestre (1995), está nas concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica. Os autores alertam que os estudantes apresentam uma forte tendência de realizar uma associação à ordem das palavras, da esquerda para a direita, ao traduzirem, cometendo diversos erros.

1. Os dados divulgados nesse artigo são inéditos e apresentam parte dos resultados da pesquisa de Mestrado da primeira autora, sob orientação das demais autoras.

Matos e Da Ponte (2008) relatam ainda outro erro comum apresentado pelos estudantes. Este diz respeito ao significado das letras nas equações. Kieran (1995) e Booth (2011) alertam que os estudantes apresentam dificuldades em conceber as letras como números desconhecidos (variáveis ou incógnitas). E, muitas vezes, quando compreendem que uma letra representa um valor numérico, muitos tendem a pensar que esse valor é fixo para a letra que o representa, como se a letra "x" necessariamente tivesse que representar o valor numérico 2. Os autores justificam a presença dessa crença pelo fato de, na aritmética, as letras serem utilizadas como unidades de medida, como *cm* para centímetros, o que não ocorre na álgebra.

Outro fato importante, observado por Freitas (2002), diz respeito à verificação do resultado encontrado. Relata que, após resolverem a equação, muitos alunos não tem certeza sobre o resultado e não demonstram saber como determinar sua confiabilidade. Bernard e Cohen (1995) destacam que esse fato deriva da incompreensão sobre o que significa a raiz de uma equação e afirmam que este deve ser um conhecimento básico para qualquer resolvedor de equações.

Erros na resolução de equações também derivam da incompreensão do sinal de igualdade como uma equivalência entre membros. Esse erro, evidenciado por Freitas (2002), está relacionado à interpretação do sinal de igualdade como um símbolo unidimensional que precede a resposta numérica de um problema. Kieran (1995) e Booth (2011) alertam que essa concepção sobre o símbolo de igualdade também está ligada ao ensino de aritmética onde, muitas vezes, os estudantes apenas têm contato com problemas que imprimem essa lógica. Os autores ainda ressaltam que, na maior parte dos problemas, a operação é apresentada na vertical e, quando apresentada na horizontal, aparece no formato 4+5=9 (com números e operações do lado esquerdo do sinal de igual e a resposta ou espaço vazio à direita).

A maioria dos erros cometidos pelos estudantes, então, não são de ordem algébrica, mas consequência de conceitos e concepções aritméticas mal compreendidas. Por fim, cabe destacar que alguns estudantes não chegam a cometer erros propriamente. Esses alunos apresentam tanta dificuldade que sequer compreendem bem o que representa uma equação, muito menos o que esta envolve em sua resolução (Booth, 1995; Da Ponte, Branco, Matos, 2009).

Erros relacionados a técnicas de resolução e suas possíveis origens

Erros cometidos pelos alunos e relacionados ao uso de métodos informais são descritos por Booth (1995). O autor salienta que os métodos informais são importantes para a aprendizagem, mas que os estudantes também devem conhecer e empregar métodos formais de resolução de equações. Relata que alunos que não costumam representar, por exemplo, adições como sentenças escritas, utilizando apenas métodos de contagem, possivelmente terão dificuldades de generalizar, algebricamente, essas sentenças.

Kieran (1995) destaca a supergeneralização de uma estratégia como origem de erros na resolução de equações. A autora relata que as experiências com situações aritméticas abertas fazem com que os alunos acreditem que, para solucionar equações e descobrir o termo desconhecido, devem aplicar as operações inversas, partindo do segundo membro da equação em direção ao primeiro, como realizavam nas situações aritméticas abertas.

Da Ponte, Branco e Matos (2009) e Matsuda e colaboradores (2009) destacam erros procedurais com origens na má compreensão ou na falta de compreensão do conceito de variável, como a adição de termos não semelhantes ($3+4n=7n$). Os autores também destacam a adição incorreta de termos semelhantes ($-4x+2x=6x$) que pode ter origem em conhecimentos mal formados sobre números inteiros e racionais.

Por fim, Freitas (2002) evidencia a grande frequência de erros em relação à transposição de elementos do primeiro membro para o segundo. Esses erros na resolução têm origem em conhecimentos prévios variados (números inteiros, concepção de operações e outros) que podem não estar bem construídos.

Os estudos indicam que, apesar da divisão em duas categorias, os erros conceituais e procedurais estão relacionados e constituem obstáculos à aprendizagem do aluno que precisam ser transpostos, pois, como alertam Booth, Koedinger e Siegler (2007), o uso de procedimentos incorretos na resolução de equações está associado à falta de conhecimento conceitual. Essas incompreensões conceituais levam os estudantes a resolver menos problemas de forma correta e, em alguns casos, a aprender menos com a instrução, a menos que sejam corrigidos. Posto isso, os autores sugerem que a melhoria do conhecimento conceitual algébrico é necessária para que ocorra aprendizagem. Para auxiliar o aluno a rever conhecimentos conceituais mal formados é necessário compreender o processo de pensamento que deu origem aos erros apresentados pelo estudante. Uma forma de alcançar essa compreensão é por meio da análise dos erros (CURY, 2007). Sendo assim, o presente estudo traz reflexões sobre os erros de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, discutindo suas possíveis origens com base na literatura anteriormente apresentada.

Método

O estudo envolveu 38 estudantes brasileiros, 16 meninos e 22 meninas, (IM= 12,7 anos; DP=0,66), alunos do 8º ano de uma escola pública da região metropolitana de Porto Alegre-RS. Definiu-se como critério de exclusão percentil inferior a 20 no

Teste Não Verbal de Inteligência (R-1). Utilizou-se esse critério com o propósito de evitar os erros que são consequências de limitações neurofisiológicas.

Para verificar a ocorrência de erros conceituais e procedurais pelos estudantes, aplicou-se a Tarefa de Resolução de Problemas com Equações Algébricas do 1º grau (TRPEA), composta por quatro problemas verbais com mesmo nível de complexidade (SPERAFICO, 2013). Os problemas da TRPEA apresentavam situações de tradução literal do problema verbal para uma equação algébrica, situações de tradução não literal, situações com duas variáveis de valor equivalente e situações envolvendo a balança, que exigem maior reflexão para a compreensão das relações entre as grandezas. Entretanto, todos os problemas envolviam apenas operações no conjunto dos números inteiros. O tempo médio de aplicação da TRPEA foi de 28 minutos e 20 segundos.

Durante a resolução de cada problema, observaram-se as ações realizadas pelo estudante com o auxílio de um protocolo de observação em que foram registrados os tipos de erros cometidos. Após a resolução de cada problema, realizou-se uma entrevista clínica, questionando os alunos sobre o pensamento empregado para solucionar a questão, com o propósito de compreender o pensamento que levou à resposta correta, bem como aquele que conduziu ao erro.

Para análise, os erros foram categorizados em dois tipos: erros relacionados a aspectos conceituais e erros relacionados a técnicas de resolução (FREITAS, 2002, SPERAFICO; GOLBERT, 2011).

Resultados e discussão

A categoria *erros relacionados a aspectos conceituais* foi subdividida em sete subcategorias: a) tradução do enunciado em uma equação, b) notação escrita, c) incompreensão das letras como variáveis, d) incompreensão do significado de raiz, e) incompreensão do sinal de igualdade como equivalência, f) incompreensão das características das operações com inteiros e g) conceitos matemáticos mal formados. Já a categoria *erros relacionados a técnicas de resolução* foi subdividida em seis subcategorias: a) transposição de elementos, b) operações com inteiros, c) método informal de resolução, d) supergeneralização de técnica aritmética, e) operação com termos não semelhantes e f) operação com termos semelhantes. A ocorrência desses erros foi verificada em cada um dos problemas resolvidos.

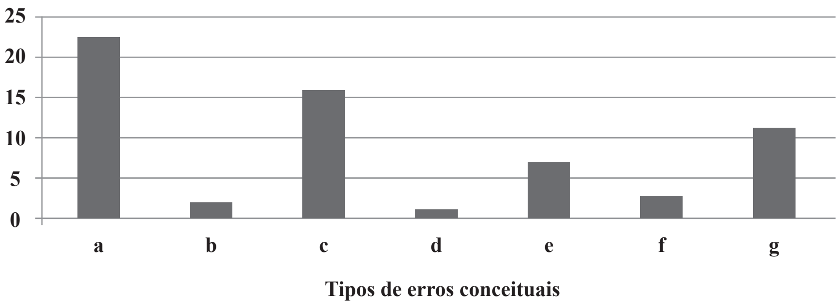
De modo geral, foi possível observar uma maior frequência de erros procedurais (80 ocorrências; 55,95%) do que conceituais (63 ocorrências; 44,05%), sendo que o tipo de erro mais recorrente foi o relacionado a operações com números inteiros (34 ocorrências).

Para aprofundar a discussão sobre a origem dos erros cometidos pelos estudantes, organizou-se a apresentação e discussão dos resultados nas duas categorias anteriormente apresentadas.

Análise dos erros relacionados a aspectos conceituais

Em relação aos erros conceituais, foi possível verificar uma maior ocorrência desses na tradução do problema, como evidenciado no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Ocorrência de erros conceituais na resolução da TRPEA



Fonte: dados da pesquisa

Legenda: a) tradução do enunciado em uma equação; b) notação escrita; c) incompreensão das letras como variáveis; d) incompreensão do significado de raiz; e) incompreensão do sinal de igualdade como equivalência; f) incompreensão das características das operações com inteiros; g) conceitos matemáticos mal formados.

De fato, muitos estudantes demonstraram não compreender bem o que é uma equação, como uma aluna que, no problema 1, não é capaz de formular uma equação e escreve a sentença 13+5=18, mas não sabe explicar como chegou a esta representação e a este resultado, apenas diz "somei os números". Muitos estudantes apresentaram dificuldades em interpretar o problema, compreender seu objetivo e transformar suas informações em símbolos matemáticos. Tal fato, como propõem Lochhead e Mestre (1995), pode estar relacionado às concepções errôneas dos estudantes em relação à estrutura e interpretação das afirmações algébricas. Além disso, os autores alertam que os estudantes têm forte tendência em fazer relação à ordem das palavras, da direita para esquerda, ao realizarem a tradução, o que gera erros. Foi possível observar esta característica em alguns estudantes, na resolução dos problemas que não apresentavam uma ordem direta entre as palavras do enunciado e as operações a serem realizadas. Um exemplo é fornecido por um aluno que, no problema 1, em que o enunciado afirmava "subtraindo 13 anos do dobro de sua idade", escreve 13+2x, procurando registrar os dados na ordem em que são apresentados no enunciado.

O segundo tipo de erro mais frequente está relacionado à incompreensão das letras como variáveis. Um exemplo é fornecido por estudante que escreve a equação x+3x-12=2x+36, realiza a transposição e, quando opera os termos semelhantes x+3x-2x, desconsidera o primeiro x escrito. Ao ser questionado, diz que "ele não faz parte da conta, mas está ali porque precisa aparecer no final" (fala do aluno). Esse erro, como explica Booth (1995), está relacionado ao fato dos alunos apresentarem dificuldades em conceber uma letra como um número desconhecido.

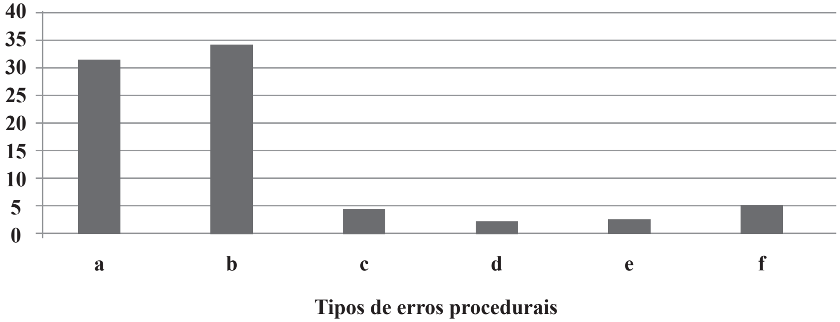
Além disso, Booth (1995) também chama atenção para o uso das letras no ensino de aritmética, onde essas trazem outros significados, como *m* que, no contexto aritmético, representa a unidade de medida *metros* e não um número desconhecido. Tal associação pode ter sido estabelecida por estudante que, no problema 1, escreve 2x-13, mas opera 2.13. Quando questionada sobre o que representa o símbolo "x", ora diz que é "vezes", ora afirma que representa "a idade de Carlos". Isso pode ter ocorrido pelo fato de, muitas vezes, a operação de multiplicação ser representada pelo símbolo "x" no ensino de aritmética, fazendo com que se estabeleça essa relação incorreta.

A incompreensão do sinal de igualdade como equivalência também prejudicou o desempenho de alguns estudantes. Esses não admitiam o sinal de igualdade como equivalência entre os membros, afirmando que este era utilizado "antes de escrever o resultado final" (fala dos alunos). Após os questionamentos, uma aluna passou a utilizar dois sinais de igualdade, um para estabelecer relação de equivalência e outro para separar o cálculo do resultado final. Este erro, discutido por Kieran (1995) e Booth (2011), pode ter origens no ensino de aritmética, onde os alunos são confrontados apenas com esta lógica em que o sinal de igualdade pressupõe um resultado.

Análise dos erros relacionados a técnicas de resolução

Em relação aos erros relacionados a técnicas de resolução, os alunos apresentaram maior ocorrência de erros nas operações com números inteiros, como pode ser visualizado no Gráfico 2.

Gráfico 2 – Ocorrência de erros procedurais na resolução da TRPEA



Fonte: dados da pesquisa

Legenda: a) transposição de elementos; b) operações com inteiros; c) método informal de resolução; d) supergeneralização de técnica aritmética; e) operação com termos não semelhantes; f) operação com termos semelhantes.

No caso de alguns estudantes, estes erros podem estar relacionados à falta de monitoramento das ações realizadas durante a resolução, já que os estudantes perceberam, após revisão, os erros cometidos, corrigindo-os. Isso ocorreu com uma aluna que, no problema 3, resolve mentalmente 56+37=94 e, após momentos em que parece refletir sobre o resultado, escreve e resolve o algoritmo, verificando seu erro. Quando questionada, diz que percebeu, por meio de conferência mental, que 6+6 era 12, assim, 6+7 deveria ser 13, mas havia respondido 14.

Outros estudantes, entretanto, não identificaram seus erros apenas com a conferência da resolução desenvolvida. Alguns desses erros podem ter origem na falta de compreensão do conceito de número inteiro e dos procedimentos de operação, ou na supergeneralização de uma regra relacionada a operações de multiplicação e divisão com números inteiros (“regra de sinais”) que é aplicada a operações de adição e subtração. Esse foi o caso da aluna que ficou em dúvida quanto à operação 45-13, no 4º problema. Pensava ter que aplicar a “regra de sinais”, e após, realizar a subtração, obtendo -32. Dessa forma, como alertam Booth, Koedinger e Siegler (2007), o uso de procedimentos incorretos na resolução de equações também pode estar associado à falta de conhecimento das características conceituais.

Outro erro frequente deu-se em relação à transposição de elementos. Alguns estudantes identificaram facilmente esses erros após conferência do procedimento de resolução e puderam corrigi-lo. Já outros estudantes, não perceberam sozinhos os erros cometidos, como uma estudante que não registra operações, apenas números e letras (2x x=13 5) e diz não saber que operações utilizar, demonstrando incompreensão do procedimento e método utilizado.

Assim, os erros relacionados à transposição de elementos podem também ter origem na incompreensão do método de resolução utilizado pelo aluno, como no caso de um estudante que, em sua fala (abaixo), deixa clara a não compreensão do método, na resolução do 1º problema, onde reduz a equação à 3x=18 e relata que x vale 18:

Entrevistador: E esse 3? O que se faz com ele? O que ele significa?
Aluno: Tem que usar para dividir o 18.
Entrevistador: E quanto fica?
(precisa de ajuda para resolver a divisão)
Aluno: 6.
Entrevistador: E o que significa o 6?
Aluno: Ele é 3x6, daí dá 18.
Entrevistador: O que você faz com ele? Ele é parte da resposta?
Aluno: Não.
Entrevistador: E o que se faz com ele?
Aluno: Vou puxar ele pra cá (outro membro) e subtrair.

Esses estudantes que resolvem as equações mecanicamente, sem compreensão do método utilizado, podem apresentar lacunas em conhecimentos aritméticos anteriores necessários para a compreensão do conceito de equação e de seu método de resolução, ou ainda, apresentam tanta dificuldade que sequer compreendem bem o que representa uma equação, muito menos o que esta envolve em sua resolução (Da Ponte; Branco; Matos, 2009).

Considerações finais

As subcategorias de erros mais frequentes neste estudo vão ao encontro das apresentadas pela literatura consultada, e mostram que a maior parte dos erros cometidos pelos estudantes, mesmo que procedurais, estão relacionados a aspectos conceituais, tais como, incompreensão das letras como variáveis, entre outros. Esse resultado corrobora aos achados de estudo anterior (SPERAFICO; GOLBERT, 2011), que ressalta que grande parte desses erros têm origem em conhecimentos aritméticos mal formados.

Alerta-se para a importância do educador identificar e refletir sobre os erros cometidos pelos educandos para, através dessa análise, desenvolver propostas didático-pedagógicas que auxiliem os alunos a transpor esses obstáculos e construir conhecimentos bem estruturados.

Referências

BERNARD, J.; COHEN, M. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 10, p. 111-126.

BOOTH, J. Why Can't Students Get the Concept of Math? **International Dyslexia Association's Perspectives on Language and Literacy quarterly,** Spring, 2011. Disponível em: <http://www.resourceroom.net/math/ida_math_spring2011_booth.asp>. Acesso em: 05 mar. 2012.

BOOTH, J.; Koedinger, K. Key misconceptions in algebraic problem solving. In: Love, B.; McRae, K.; Sloutsky, V. (Eds.). **Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society**. Austin: Cognitive Science Society, p. 571-576, 2008.

BOOTH, J. L, Koedinger, K. R., & Siegler, R. S. The effect of prior conceptual knowledge on procedural performance and learning in algebra (poster). In: **29th annual meeting of the Cognitive Science Society**, 2007, Nashville: Cognitive Science Society, 2007. Disponível em: <http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2007/docs/p1714.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2012.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 3, p. 23-36.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et la didactique des mathematiques.In: Bednarz N. ; Garnier, C (Eds)**. Construction des savoirs:** obstacles et conflits. Ottawa: Les Éditions Agence d'ARC, p. 41-63, 1989.

CURY, H. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as resposta dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DA PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação-BGIDC, 2009. Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/

mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf>. Acesso em: 07 mar. 2012.

FREITAS, M. **Equação do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.

KIERAN, C. Equações e expressões em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 9, p. 104-110.

LOCHHEAD, J. MESTRE, J. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 13, p. 144-154.

MATOS, A.; DA PONTE, J. O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. **Revista Latinoamericana de Investigacion Matematica Educativa**, México, v. 11, n. 2, p. 195-231, 2008.

MATSUDA, N. et al. A Computational Model of How Learner Errors Arise from Weak Prior Knowledge. In: Taatgen, N.; van Rijn, H. (Eds.). **Proceedings of the 31th Annual Conference of the Cognitive Science Society**. Austin: Cognitive Science Society, p. 1-6, 2009. Disponível em: <http://www.cs.cmu.edu/~wcohen/postscript/cogsci-2009.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2012.

PINTO, N. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

SPERAFICO, Y. **Competências cognitivas e metacognitivas na resolução de problemas e na compreensão do erro:** um estudo envolvendo equações algébricas do 1º grau com alunos do 8º ano. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós Graduação em Educação. Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SPERAFICO, Y.; GOLBERT, C. Refletindo sobre os erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau: uma experiência com alunos do Ensino Fundamental. In: EDUCERE-X Congresso Nacional de Educação, 2011, Curitiba. **Anais…** Curitiba: PUCPR, 2011.

VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. In: STEFFE, L. et al. **Theories of mathematical learning**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. cap. 13, p. 219-239.

Submetido em abril de 2013
Aprovado em setembro de 2013